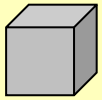
Università degli Studi di Milano
Facoltà di Medicina e Chirurgia

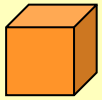
Corso di laurea: Tecniche Ortopediche

Corso di Fisica A.A. 2022-2023
Docente: Marie Claire Cantone

MECCANICA DEI FLUIDI



STATICA



DINAMICA

IL MOTO DEI FLUIDI

Nello studio del moto di un fluido … bisogna descrivere il moto di ciascuna particella ??

Meglio definire una grandezza in ogni punto e istante.

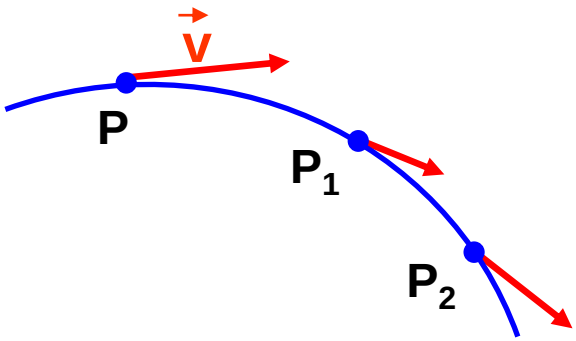
IL MOTO DEI FLUIDI

Nello studio del moto di un fluido … bisogna descrivere il moto di ciascuna particella ??

Meglio definire una grandezza in ogni punto e istante.

Linea di campo del vettore velocità

Linea di flusso



La traiettoria è in ogni punto tangente a $\vec{v}$.

In ogni punto P del liquido è definibile un vettore velocità $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$.

Quando la velocità è solo funzione della posizione ed è indipendente dal tempo $\vec{v} = \vec{v}(P)$ si ha il moto stazionario.

La traiettoria di una particella che arriva in P è la stessa per qualsiasi altra particella che arriva in P (linea di velocità, di corrente o di flusso).

MOTO STAZIONARIO E TUBO DI FLUSSO

Nel moto stazionario la velocità in un dato punto resta costante nel tempo ma può cambiare da punto a punto.

L'insieme delle linee di flusso passanti per i punti di una linea chiusa, immersa nel fluido, è un tubo di flusso.



tubo di flusso, o di corrente

Notare che:

-nessuna linea di flusso può attraversare i confini del tubo di flusso,

-le particelle di fluido non possono entrare o uscire dalle pareti di un tubo di flusso,

-la quantità di fluido che entra da un'estremità deve uscire dall'altra ,

-il tubo di flusso si comporta come una conduttura.

DINAMICA DEI FLUIDI

FLUIDO

- **comprimibile o incomprimibile, viscoso o non viscoso (in assenza di forze di attrito interno).**

MOTO DI UN FLUIDO

- **stazionario o turbolento (in cui la velocità varia sia da punto a punto che da un istante all'altro),**
- **rotazionale o irrotazionale (in cui un elemento di fluido si muove su un percorso senza ruotare attorno al proprio asse, e questo anche nel caso di traiettoria circolare come quella di un vortice).**

DINAMICA DEI FLUIDI

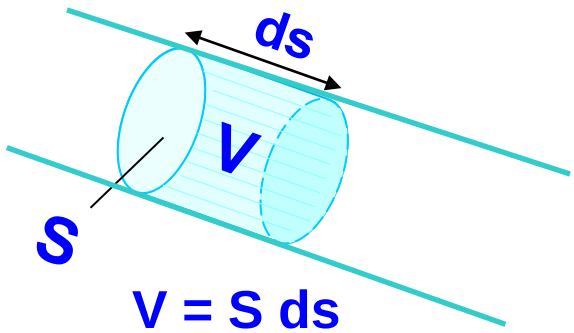
FLUIDO IDEALE

- **incomprimibile, non-viscoso, che si muove di moto irrotazionale e stazionario.**

Per un liquido reale vengono presi in considerazione gli effetti dovuti alla viscosità.

PORTATA DI UN FLUIDO

PORTATA di un fluido in un condotto, è definita come il volume di fluido che attraversa una sezione del condotto nell'unità di tempo, oppure l'area della sezione trasversa moltiplicata per la velocità del fluido.



$$Q = V / dt = S\, ds / dt = Sv$$

In un tempo dt il fluido è avanzato di un tratto ds.

Nel S.I. la portata si misura in $m^3 s^{-1}$

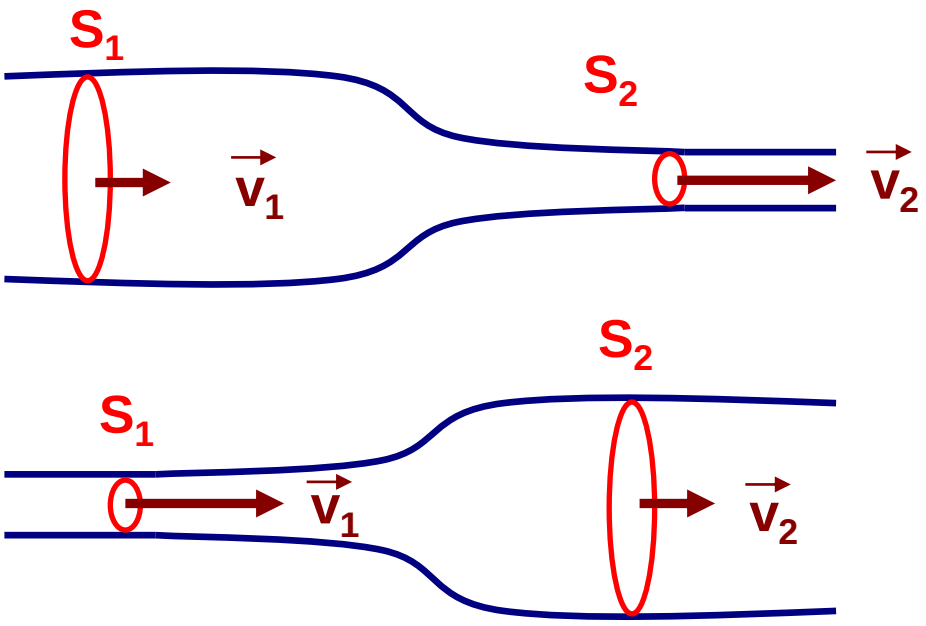
EQUAZIONE DI CONTINUITA’

Esprime la conservazione della massa per un liquido in un condotto.

$$Q_1 = Q_2$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

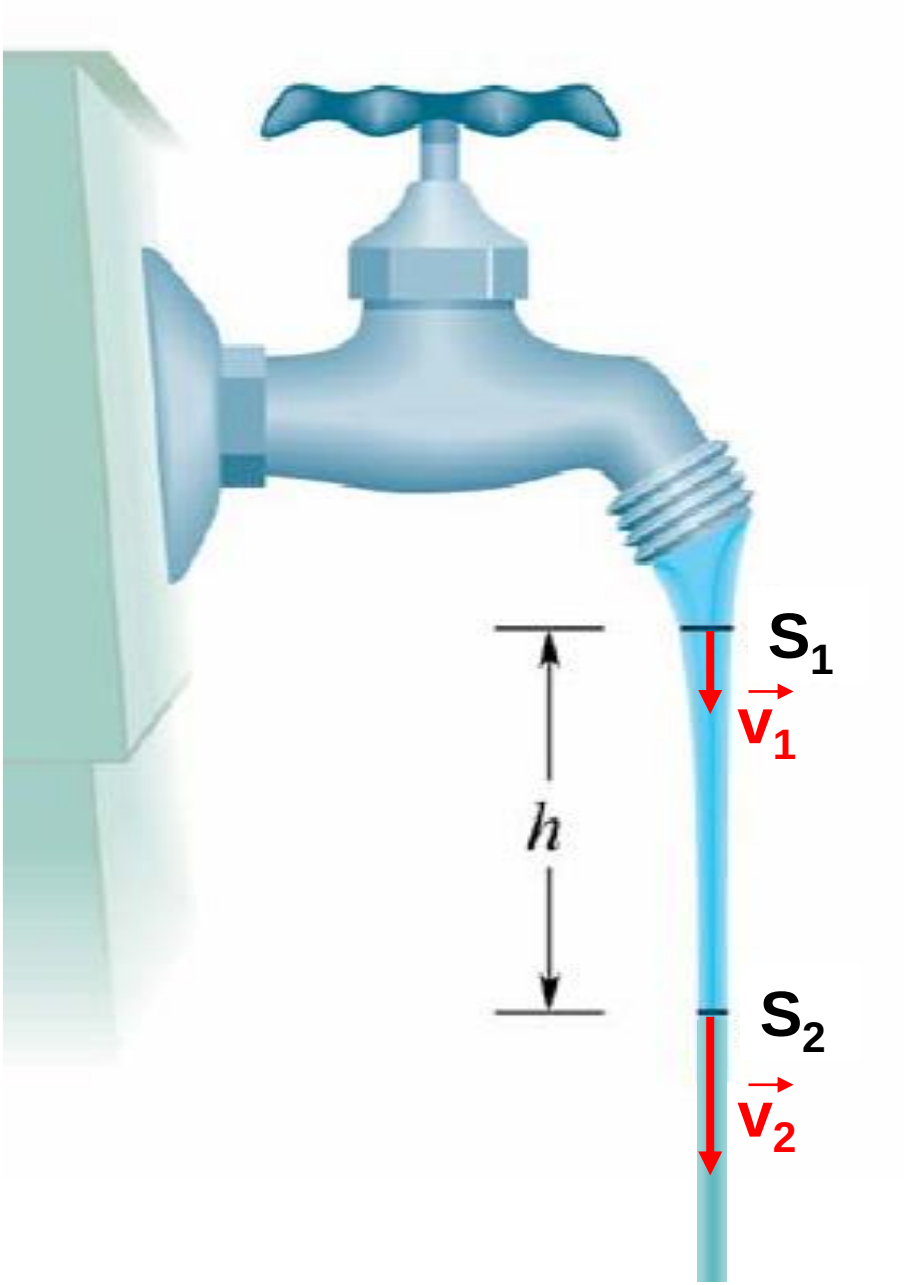
Ad esempio in un condotto a sezione variabile, la velocità varia.



La riduzione della sezione di un condotto comporta un aumento della velocità.

Ad esempio: schiacciando l’uscita di un tubo flessibile per l’acqua si aumenta la velocità dell’acqua che fluisce.

L’ aumento della sezione di un condotto comporta una diminuzione di velocità.



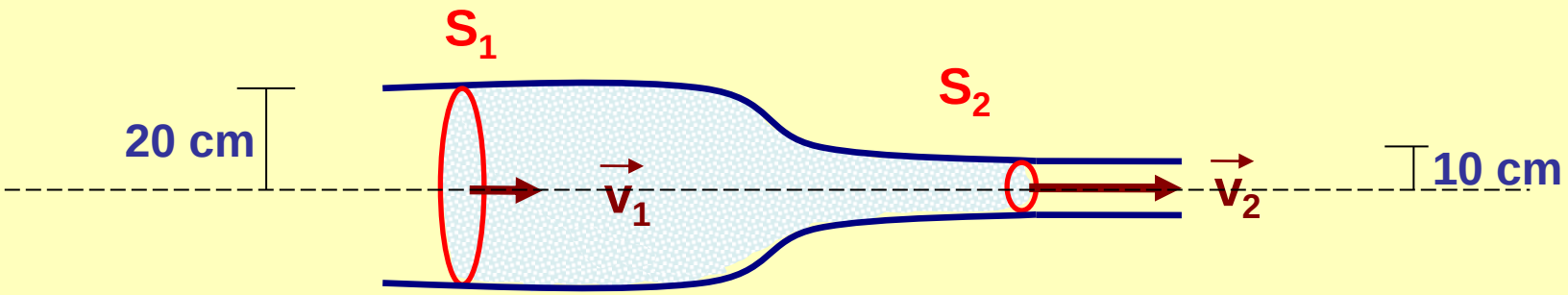
$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Ad es. l'acqua che cade verticalmente dall' estremità di un tubo, aumenta la sua velocità, ed essendo la portata costante,

la sezione del getto diminuisce.

Il raggio di un tubo in cui scorre acqua alla velocità di 3 m/s, decresce da 20 cm a 10 cm.

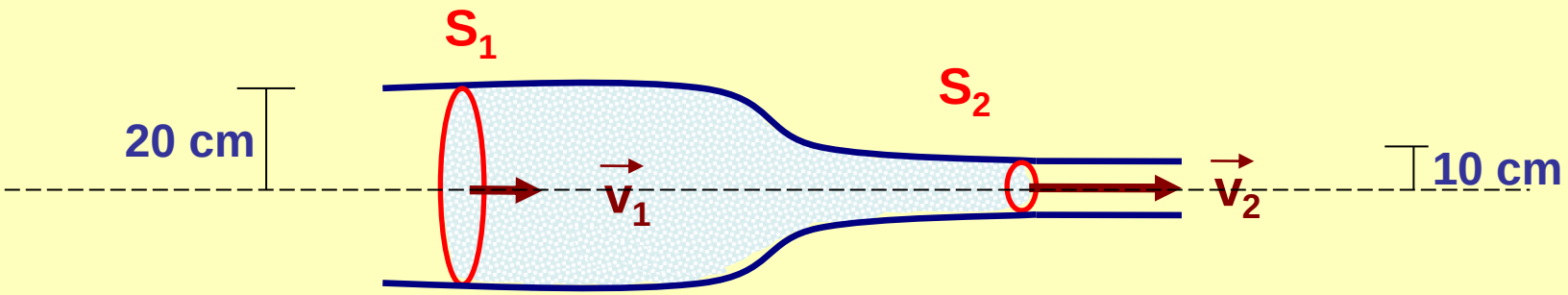
Calcolare la velocità nel tratto più stretto di tubo.



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

Il raggio di un tubo in cui scorre acqua alla velocità di 3 m/s, decresce da 20 cm a 10 cm.

Calcolare la velocità nel tratto più stretto di tubo.



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

$$S = \pi r^2$$

$r_1 = 0.2$ m ← 20 cm

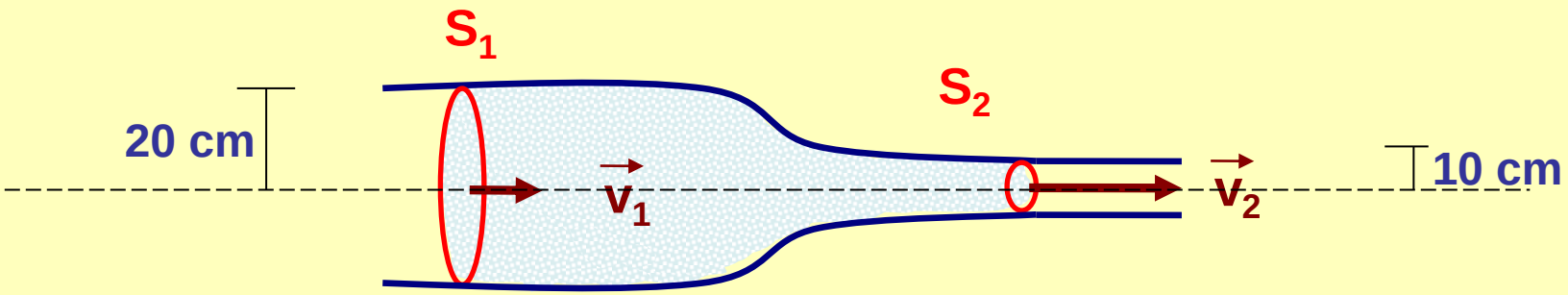
$r_2 = 0.1$ m ← 10 cm

$S_1 = 3.14 \times 0.04$ m² ← 3.14×400 cm²

$S_2 = 3.14 \times 0.01$ m² ← 3.14×100 cm²

Il raggio di un tubo in cui scorre acqua alla velocità di 3 m/s, decresce da 20 cm a 10 cm.

Calcolare la velocità nel tratto più stretto di tubo.



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} \qquad v_2 = \frac{3.14 \times 0.04\ m^2 \times 3\ m/s}{3.14 \times 0.01\ m^2}$$

$$v_2 = 12\ m/s$$

$$S = \pi r^2$$

$r_1 = 0.2$ m ← 20 cm

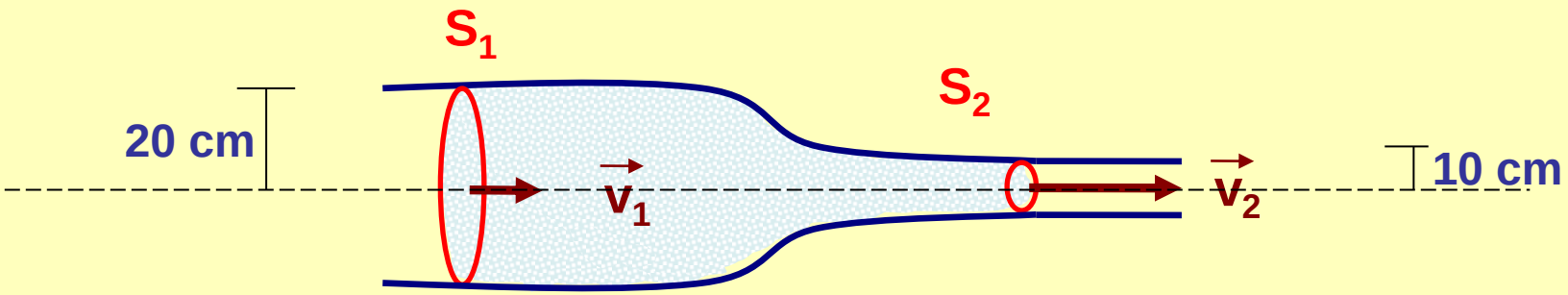
$r_2 = 0.1$ m ← 10 cm

$S_1 = 3.14 \times 0.04\ m^2$ ← $3.14 \times 400\ cm^2$

$S_2 = 3.14 \times 0.01\ m^2$ ← $3.14 \times 100\ cm^2$

Il raggio di un tubo in cui scorre acqua alla velocità di 3 m/s, decresce da 20 cm a 10 cm.

Calcolare la velocità nel tratto più stretto di tubo.



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

$$v_2 = \frac{3.14 \times 0.04\ m^2 \times 3\ m/s}{3.14 \times 0.01\ m^2}$$

$$v_2 = 12\ m/s$$

$$S = \pi r^2$$

$r_1 = 0.2$ m ← 20 cm

$r_2 = 0.1$ m ← 10 cm

$S_1 = 3.14 \times 0.04\ m^2$ ← $3.14 \times 400\ cm^2$

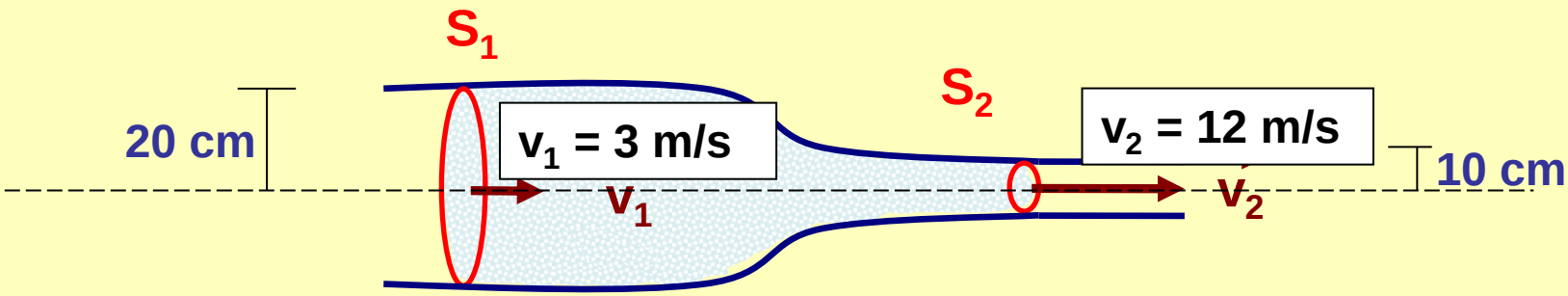
$S_2 = 3.14 \times 0.01\ m^2$ ← $3.14 \times 100\ cm^2$

$$v_2 = \frac{3.14 \times 400\ cm^2 \times 300\ cm/s}{3.14 \times 100\ cm^2}$$

$$v_2 = 1200\ cm/s$$

Il raggio di un tubo in cui scorre acqua alla velocità di 3 m/s, decresce da 20 cm a 10 cm.

Calcolare la velocità nel tratto più stretto di tubo.



$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} \qquad v_2 = \frac{3.14 \times 0.04\ m^2 \times 3\ m/s}{3.14 \times 0.01\ m^2}$$

$$v_2 = 12\ m/s$$

$S = \pi r^2$

$r_1 = 0.2$ m

$r_2 = 0.1$ m

$S_1 = 3.14 \times 0.04\ m^2$

$S_2 = 3.14 \times 0.01\ m^2$

il raggio si è dimezzato

la sezione si è ridotta ad un quarto

la velocità si è quadruplicata

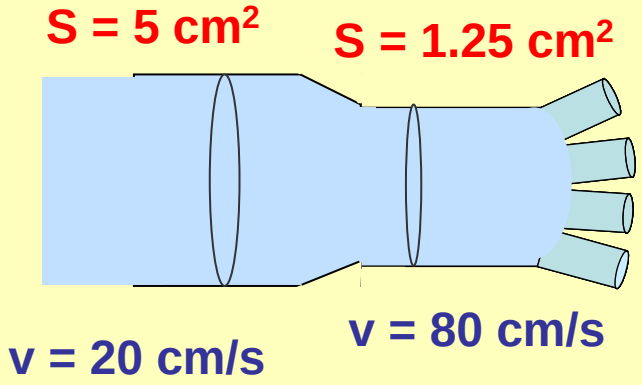
v = 3 m/s → v = 12 m/s

IN UN SISTEMA IDRODINAMICA CHIUSO

$V_{tot} \approx 6$ litri $Q_{tot} \approx 5$ litri / minuto = 83 cm^3/s

Q è costante, quindi se la sezione diminuisce la velocità aumenta e viceversa.

Quando un condotto si dirama bisogna tener conto della SEZIONE COMPLESSIVA

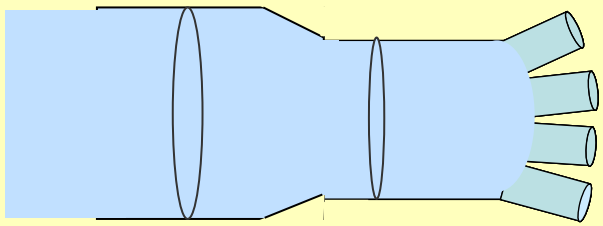


IN UN SISTEMA IDRODINAMICA CHIUSO

$V_{tot} \approx 6$ litri $Q_{tot} \approx 5$ litri / minuto = 83 cm^3/s

Q è costante, quindi se la sezione diminuisce la velocità aumenta e viceversa.

della **Quando un condotto si dirama bisogna tener conto SEZIONE COMPLESSIVA**



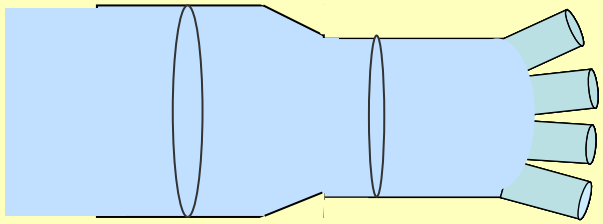
S = 0.625 cm^2
S = 0.625 cm^2
S = 0.625 cm^2
S = 0.625 cm^2

IN UN SISTEMA IDRODINAMICA CHIUSO

$V_{tot} \approx 6$ litri $Q_{tot} \approx 5$ litri / minuto = 83 cm^3/s

Q è costante, quindi se la sezione diminuisce la velocità aumenta e viceversa.

della **Quando un condotto si dirama bisogna tener conto SEZIONE COMPLESSIVA**



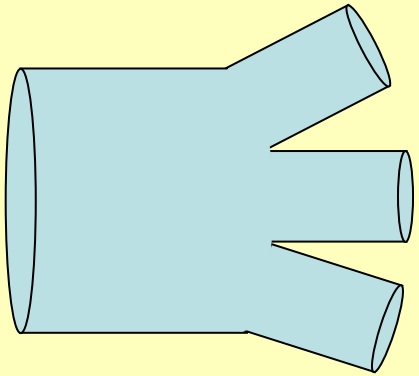
S = 0.625 cm^2
S = 0.625 cm^2
S = 0.625 cm^2
S = 0.625 cm^2

$S_{tot} = 2.5$ cm^2

v = 40 cm/s

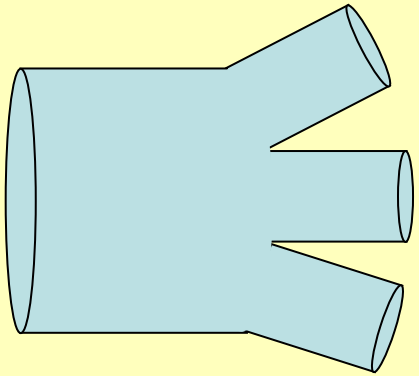
La velocità media in un capillare è 0.033 cm/s. Il raggio del capillare è 2 μm. Calcolare la portata media del capillare.

Sapendo che la portata dell'aorta è 83 cm^3/s, fare una stima del numero totale di capillari nel corpo.



La velocità media in un capillare è 0.033 cm/s. Il raggio del capillare è 2 μm. Calcolare la portata media del capillare.

Sapendo che la portata dell'aorta è 83 cm^3/s , fare una stima del numero totale di capillari nel corpo.



$Q = S\, v_m$ $\quad S = \pi\, r^2$ $\quad r = 2\ \mu m = 2 \cdot 10^{-4}\ cm$

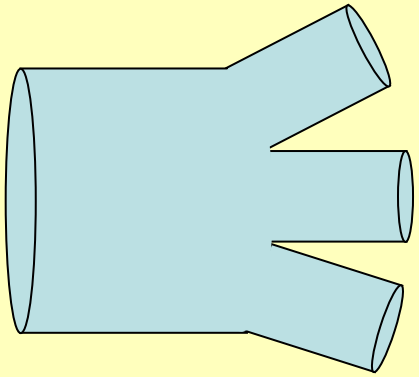
$S = 3.14 \cdot (2 \cdot 10^{-4}\ cm)^2 = 12.56 \cdot 10^{-8}\ cm^2$

$Q = 12.56 \cdot 10^{-8}\ cm^2 \cdot 3.3 \cdot 10^{-2}\ cm/s$

$Q = 41.4 \cdot 10^{-10}\ cm^3/s$

La velocità media in un capillare è 0.033 cm/s. Il raggio del capillare è 2 μm. Calcolare la portata media del capillare.

Sapendo che la portata dell'aorta è 83 cm^3/s, fare una stima del numero totale di capillari nel corpo.



$Q = S\, v_m$ $\quad S = \pi\, r^2$ $\quad r = 2\ \mu m = 2 \cdot 10^{-4}\ cm$

$S = 3.14 \cdot (2 \cdot 10^{-4}\ cm)^2 = 12.56 \cdot 10^{-8}\ cm^2$

$Q = 12.56 \cdot 10^{-8}\ cm^2 \cdot 3.3 \cdot 10^{-2}\ cm/s$

$Q = 41.4 \cdot 10^{-10}\ cm^3/s$

$Q_{TOT} = N\, Q$ $\quad N = Q_{TOT} / Q$

$N = 83\ cm^3\ s^{-1} / (41.4 \cdot 10^{-10}\ cm^3/s)$

$N \approx 2 \cdot 10^{10}$ capillari

TEOREMA DI BERNOULLI

Principio di conservazione dell'energia per i fluidi

Per un liquido ideale (incomprimibile, non-viscoso, che si muove di moto irrotazionale e stazionario) la somma di pressione ed energia meccanica per unità di volume è costante in ciascuna sezione del condotto.

Per ricavare l'equazione di Bernoulli

Ricordiamo Teorema della energia cinetica

$$L_{1\to2} = T_2 - T_1$$

$$\Delta T = L$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2 = L_{12}$$

TEOREMA DI BERNOULLI

Principio di conservazione dell'energia per i fluidi .

Per un liquido ideale (incomprimibile, non-viscoso, che si muove di moto irrotazionale e stazionario) la somma di pressione ed energia meccanica per unità di volume è costante in ciascuna sezione del condotto.

Per ricavare l'equazione di Bernoulli

Ricordiamo Teorema della energia cinetica

$$L_{1\to2} = T_2 - T_1$$

$$\Delta T = L$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2 = L_{12}$$

$$L_{\text{tutte forze}} = \Delta T_M$$

$$Lp + Lg = \Delta T_M$$

M massa di fluido in movimento

TEOREMA DI BERNOULLI

Principio di conservazione dell'energia per i fluidi .

Per un liquido ideale (incomprimibile, non-viscoso, che si muove di moto irrotazionale e stazionario) la somma di pressione ed energia meccanica per unità di volume è costante in ciascuna sezione del condotto.

Per ricavare l'equazione di Bernoulli

Ricordiamo Teorema della energia cinetica

$$L_{1\to2} = T_2 - T_1$$

$$\Delta T = L$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2 = L_{12}$$

Forza di gravità

Forza di pressione

$$L_{\text{tutte forze}} = \Delta T_M$$

$$Lp + Lg = \Delta T_M$$

M massa di liquido in movimento

TEOREMA DI BERNOULLI

Principio di conservazione dell'energia per i fluidi.

Per un liquido ideale (incomprimibile, non-viscoso, che si muove di moto irrotazionale e stazionario) la somma di pressione ed energia meccanica per unità di volume è costante in ciascuna sezione del condotto.

Per ricavare l'equazione di Bernoulli:

$$L_{\text{tutte forze}} = \Delta T_M$$

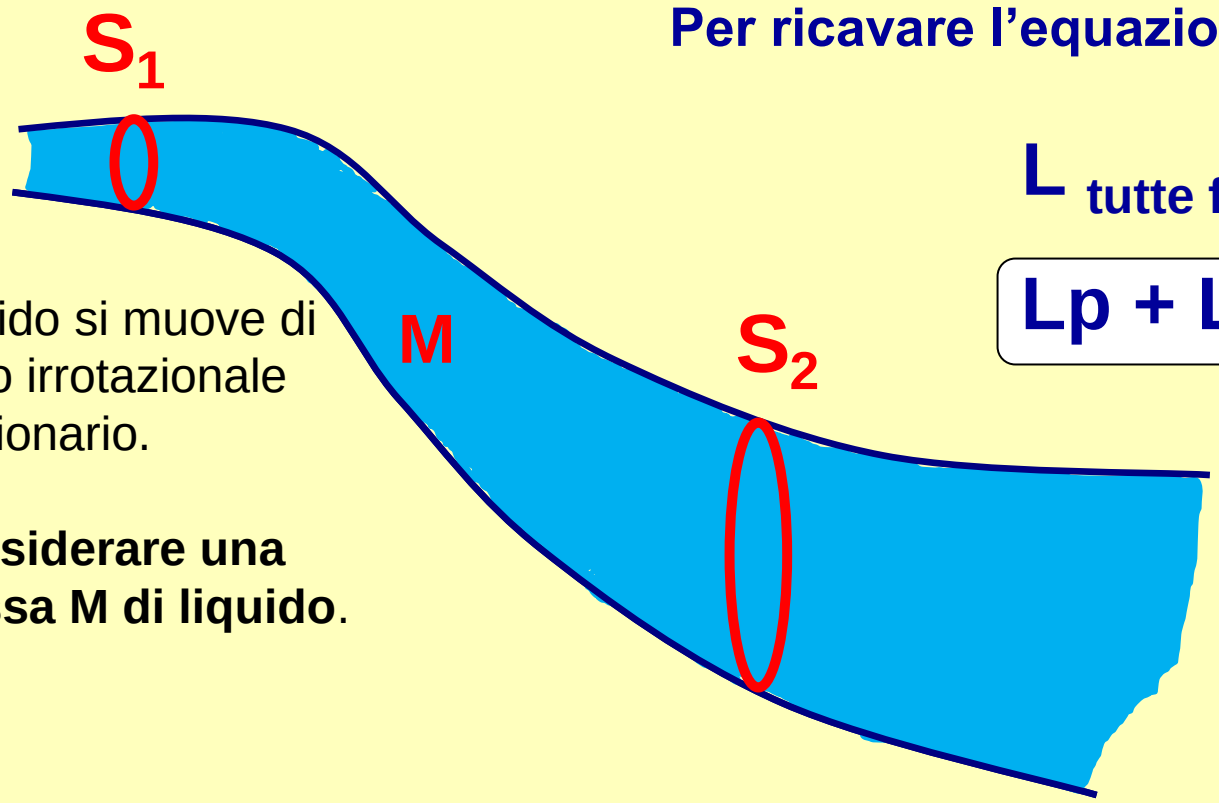
$$Lp + Lg = \Delta T_M$$



TEOREMA DI BERNOULLI

Principio di conservazione dell'energia per i fluidi.

Per un liquido ideale (incomprimibile, non-viscoso, che si muove di moto irrotazionale e stazionario) la somma di pressione ed energia meccanica per unità di volume è costante in ciascuna sezione del condotto.



Liquido si muove di moto irrotazionale stazionario.

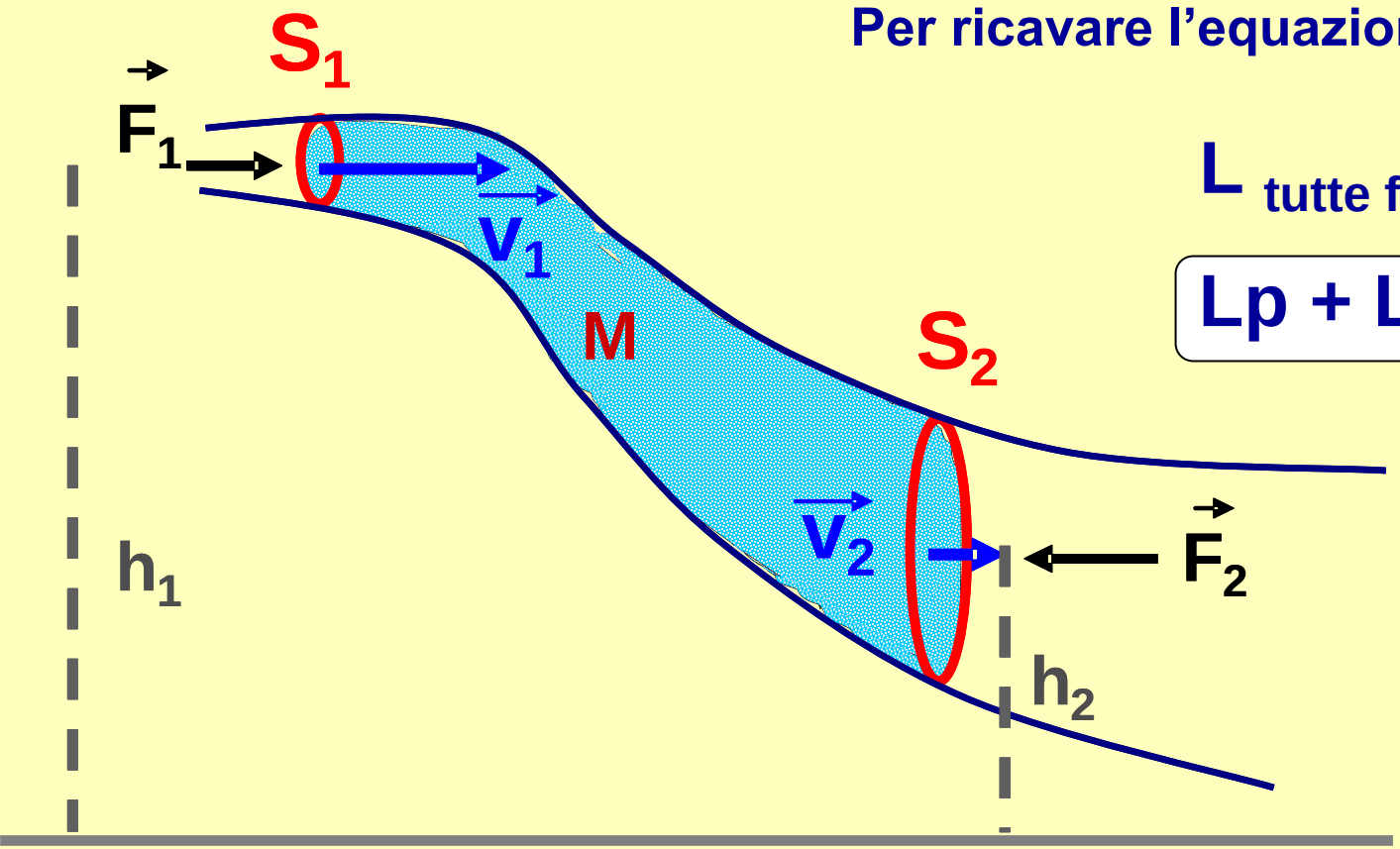
Considerare una massa M di liquido.

Per ricavare l'equazione di Bernoulli:

$$L_{\text{tutte forze}} = \Delta T_M$$

$$Lp + Lg = \Delta T_M$$

La massa M di liquido che avanza, si trova inizialmente fra le sezioni S_1 e S_2 e dopo un tempo Δt, fra le sezioni S_1' e S_2'. Il liquido è incomprimibile,

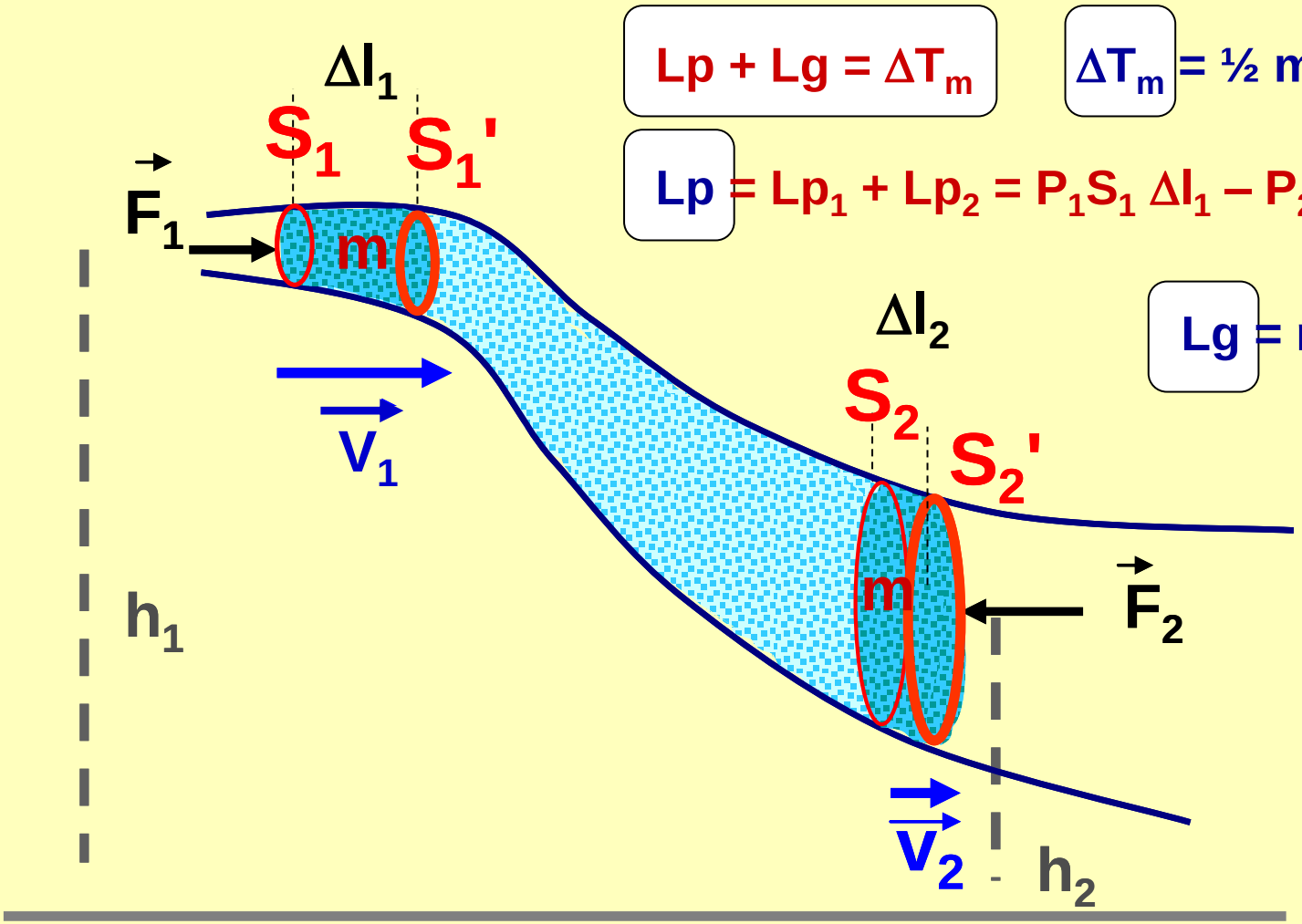


Per ricavare l'equazione di Bernoulli:

$$L_{\text{tutte forze}} = \Delta T_M$$

$$Lp + Lg = \Delta T_M$$

La massa M di liquido che avanza, si trova inizialmente fra le sezioni S_1 e S_2 e dopo Δt, fra le sezioni S_1' e S_2'. Il liquido è incomprimibile, quindi la massa di liquido m che attraversa S_1 in Δt è uguale alla massa di liquido m che attraversa S_2 nello stesso Δt .



$Lp + Lg = \Delta T_m$

$\Delta T_m = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

$Lp = Lp_1 + Lp_2 = P_1 S_1 \Delta l_1 - P_2 S_2 \Delta l_2 = p_1 V - p_2 V$

$Lg = mgh_1 - mgh_2$

$$L_p + L_g = \Delta T_m$$

$$p_1 V - p_2 V + mgh_1 - mgh_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

$$L_p + L_g = \Delta T_m$$

$$p_1V - p_2V + mgh_1 - mgh_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2 + p_2V = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 + p_1V$$

Energia cinetica + Energia potenziale + Lavoro dovuto alle forze di pressione

$$Lp + Lg = \Delta T_m$$

$$p_1V - p_2V + mgh_1 - mgh_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2 + p_2V = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 + p_1V$$

$$L_p + L_g = \Delta T_m$$

$$p_1V - p_2V + mgh_1 - mgh_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2 + p_2V = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 + p_1V$$

considerando $\rho = m / V$
dividiamo tutto i termini per **V**

$$\tfrac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$L_p + L_g = \Delta T_m$$

$$p_1 V - p_2 V + mgh_1 - mgh_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2 + p_2 V = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 + p_1 V$$

considerando $\rho = m / V$

dividiamo tutto i termini per **V**

$$\tfrac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$L_p + L_g = \Delta T_m$$

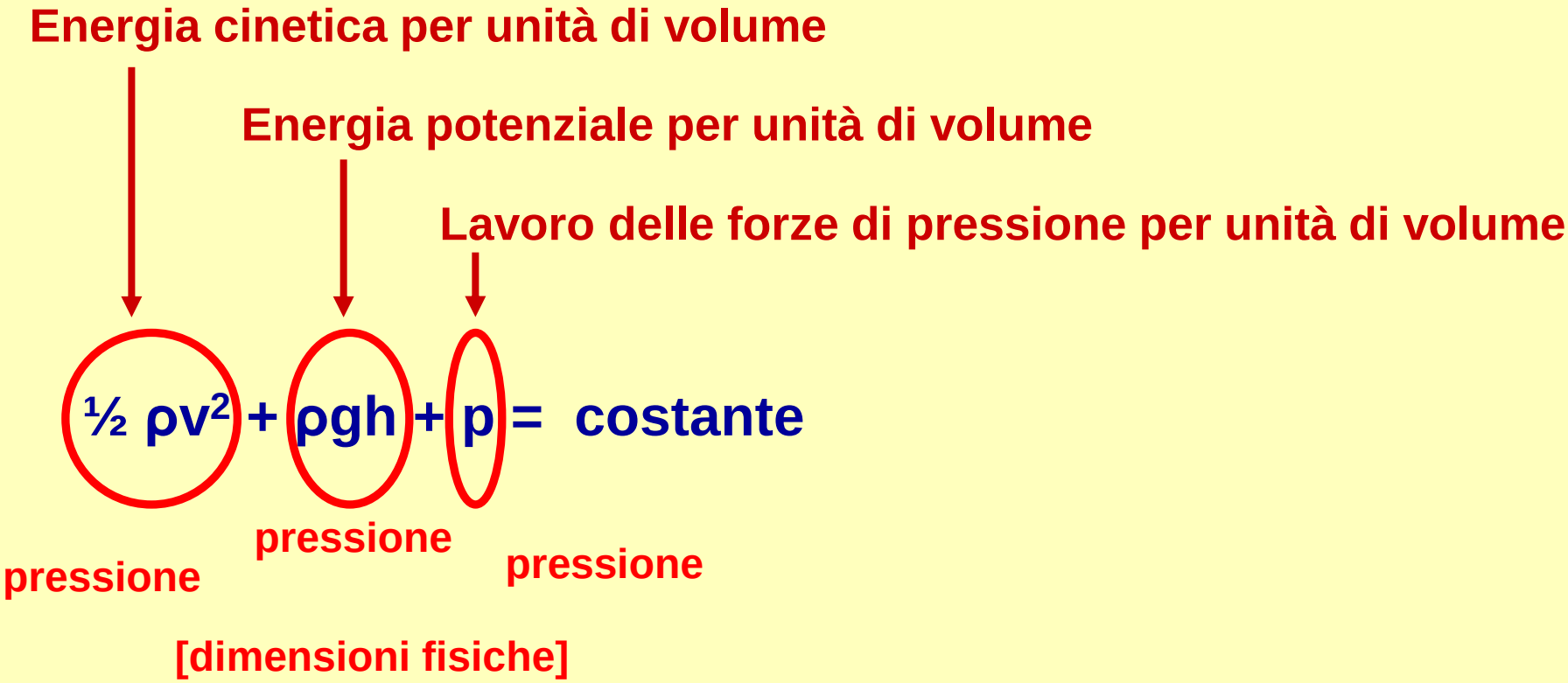
$$p_1 V - p_2 V + mgh_1 - mgh_2 = \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \tfrac{1}{2} m v_1^2$$

$$\tfrac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2 + p_2 V = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 + p_1 V$$

considerando $\rho = m / V$
dividiamo tutto i termini per **V**

$$\tfrac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$\tfrac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{costante}$$ **Equazione di Bernoulli**


Energia cinetica per unità di volume
Energia potenziale per unità di volume
Lavoro delle forze di pressione per unità di volume
½ ρv2 + ρgh + p = costante
pressione
pressione
pressione
[dimensioni fisiche]

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = \text{costante}$$

In assenza di moto

$\rho g h + p = \text{costante}$ ⇒ **Principio di Stevino**

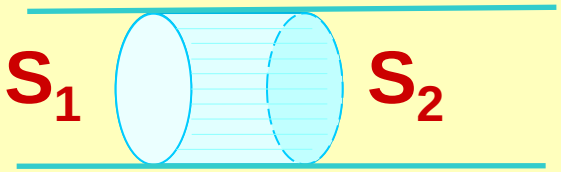
Il termine $\rho g h + p$ è detto pressione statica

Il termine $\tfrac{1}{2}\rho v^2$ è detto pressione dinamica

Per un condotto orizzontale $h_1 = h_2$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2} + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g h_1} + p_1$$

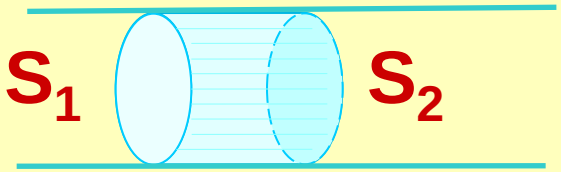
Se inoltre la sezione è costante $S_1 = S_2$ e $v_1 = v_2$



Per un condotto orizzontale $h_1 = h_2$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

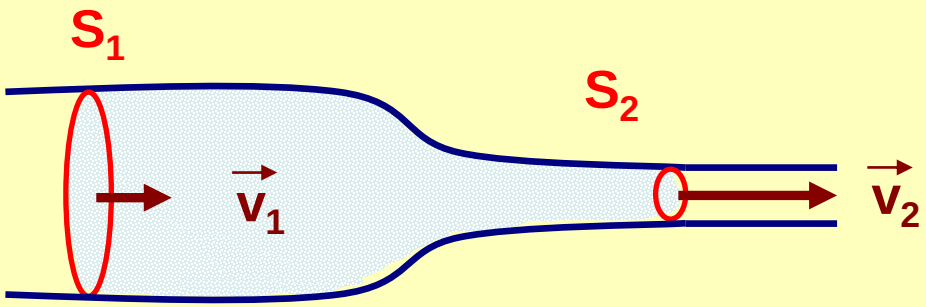
Se inoltre la sezione è costante $S_1 = S_2$ e $v_1 = v_2$



$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$p_1 = p_2$$

Per un condotto orizzontale a sezione non costante



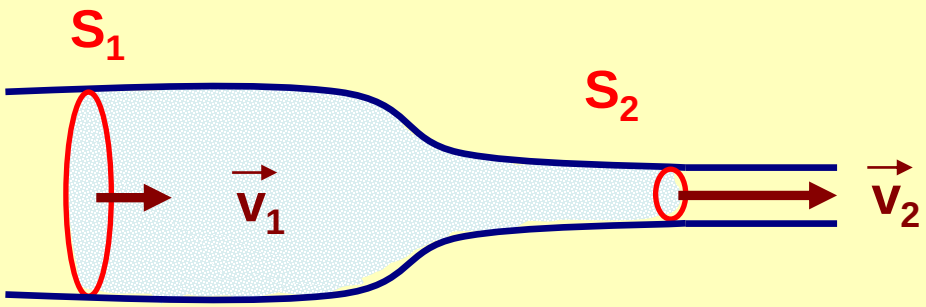
A) $p_1 > p_2$

B) $p_1 = p_2$

C) $p_1 < p_2$

? ? ? ?

Per un condotto orizzontale a sezione non costante



A) $p_1 > p_2$

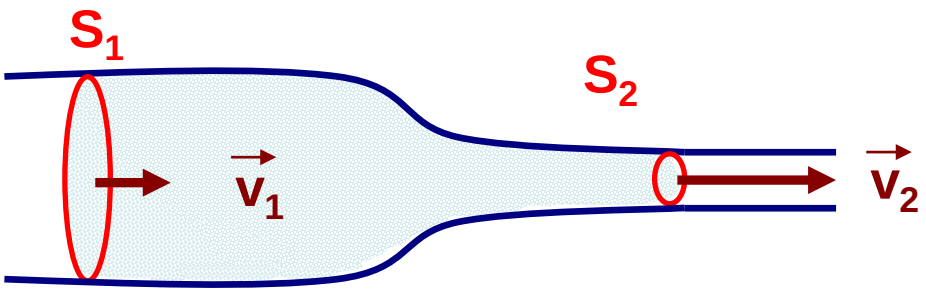
B) $p_1 = p_2$

C) $p_1 < p_2$

Per un condotto orizzontale $h_1 = h_2$

Se la sezione non è costante $S_1 \neq S_2$ e $v_1 \neq v_2$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2} + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g h_1} + p_1$$

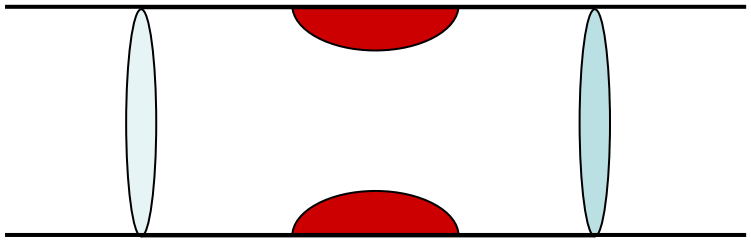


ESEMPIO

$$S_2 < S_1 \Rightarrow v_2 > v_1$$

$$p_2 < p_1$$

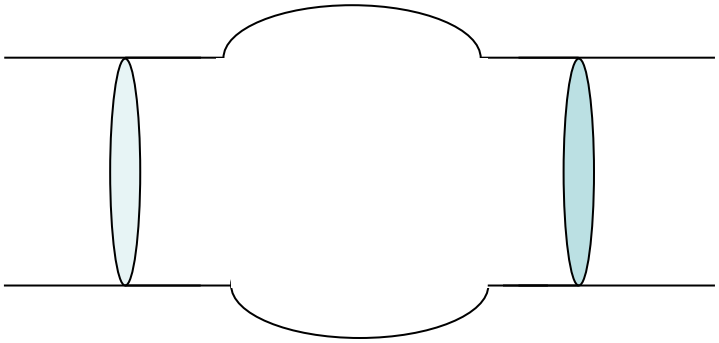
Dove la sezione si restringe la pressione diminuisce ! ! !



Arteria con placca arteriosclerotica - STENOSI

Se in una arteria si verifica un restringimento STENOSI per es. dovuto alla formazione di una placca arteriosclerotica si ha, in corrispondenza, una diminuzione di pressione (teorema di Bernoulli).

Questa condizione non regredisce spontaneamente, anzi tende a peggiorare.



Arteria con ANEURISMA

Se in una arteria si verifica un aumento locale della sezione ANEURISMA si ha, in corrispondenza, un aumento di pressione (teorema di Bernoulli).

Anche per questa condizione, come per la condizione di stenosi, non si assiste ad una regressione spontanea.

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left[1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right]$$

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left[1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right]$$

se la sezione si dimezza, la velocità ??

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left[1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right]$$

se la sezione si dimezza, la velocità raddoppia $v_2 = 2\, v_1$

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right)$$

se la sezione si dimezza la velocità raddoppia $v_2 = 2 v_1$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\, 10^3\ \mathrm{kg/m^3}\ (0.2\ \mathrm{m/s})^2 \left(1 - 4 \right)$$

$$p_2 = p_1 - 60\ \mathrm{Pa}$$

Nota: 1 Pa = 1 kg $m^{-1} s^{-2}$

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right)$$

se la sezione si dimezza la velocità raddoppia $v_2 = 2 v_1$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\, 10^3\ \text{kg/m}^3\ (0.2\ \text{m/s})^2 \left(1 - 4 \right)$$

$$p_2 = p_1 - 60\ \text{Pa}$$

$\tfrac{1}{2}\ 10^3\ 0.04\ (-3)$

Nota: 1 Pa = 1 kg $m^{-1}s^{-2}$

In condizioni normali il sangue scorre nelle arterie ad una velocità di 20 cm/s e ad una pressione di 100 mmHg.

Calcolare la variazione di pressione in un tratto di arteria in cui la sezione, a causa della presenza di placche, si è ridotta alla metà del valore iniziale.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1$$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right)$$

se la sezione si dimezza la velocità raddoppia $v_2 = 2\, v_1$

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\, 10^3\ \text{kg/m}^3\ (0.2\ \text{m/s})^2 \left(1 - 4 \right)$$

$$p_2 = p_1 - 60\ \text{Pa}$$

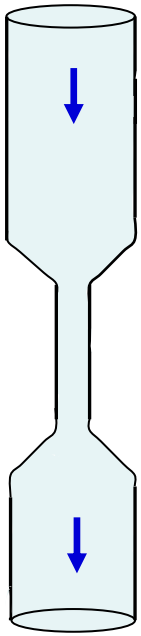
Sezione ↓	**Velocità** ↑	**Pressione** ↓
diminuisce	*aumenta*	*diminuisce*

Aspiratore

Tubo verticale a sezione variabile con p_2 uguale alla pressione atmosferica.

La pressione p_1 nella sezione ridotta è minore della pressione atmosferica.

Quindi il liquido in moto produce una aspirazione (pompa a vuoto) .



S_1 p_1 pressione minore della atmosferica

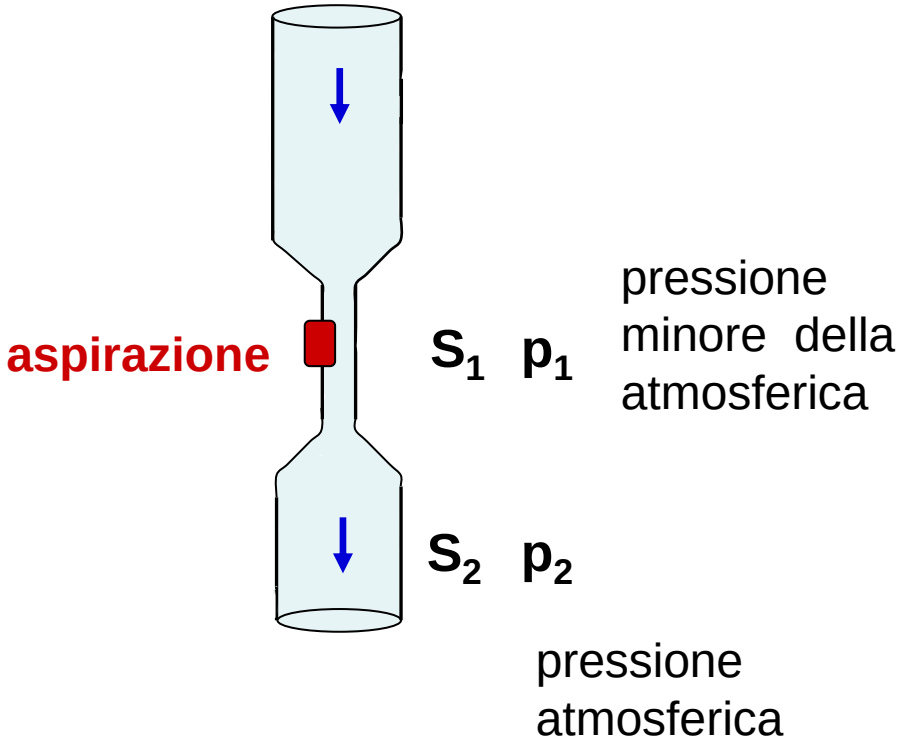
S_2 p_2 pressione atmosferica

Aspiratore

Tubo verticale a sezione variabile con p_2 uguale alla pressione atmosferica.

La pressione p_1 nella sezione ridotta è minore della pressione atmosferica.

Quindi il liquido in moto produce una aspirazione (pompa a vuoto) .



LIQUIDI REALI E TEOREMA DI BERNOULLI

I liquidi reali, durante il loro moto, manifestano forze di attrito interno, dovute alla resistenza che gli strati di liquido incontrano nello scorrere l'uno sull'altro. La presenza di forze dissipative comporta una perdita di energia di cui tener conto nell'equazione di Bernoulli.

LIQUIDI REALI E TEOREMA DI BERNOULLI

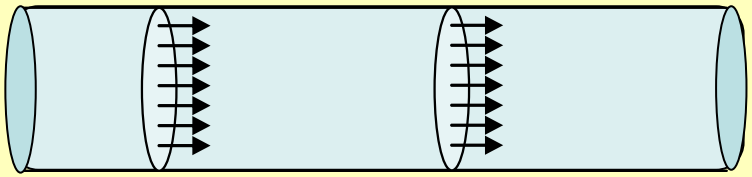
I liquidi reali, durante il loro moto, manifestano forze di attrito interno, dovute alla resistenza che gli strati di liquido incontrano nello scorrere l'uno sull'altro. La presenza di forze dissipative comporta una perdita di energia di cui tener conto nell'equazione di Bernoulli.

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 + E_a$$

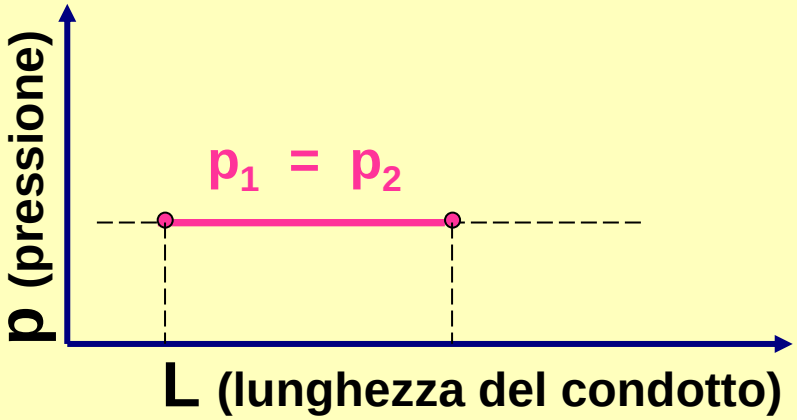
Il termine E_a (sempre positivo) indica l'energia persa per unità di volume per attrito interno (viscosità).

LIQUIDI REALI IN MOVIMENTO

Liquido ideale con $S_1 = S_2$

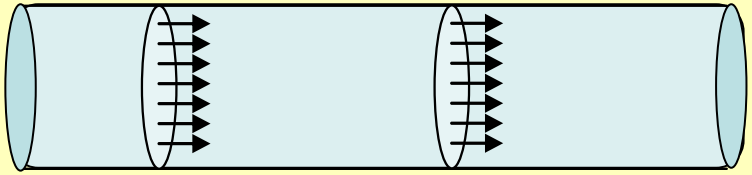


Per un liquido ideale: - la velocità è costante in tutti i punti della sezione trasversa; - la pressione è costante lungo il condotto.

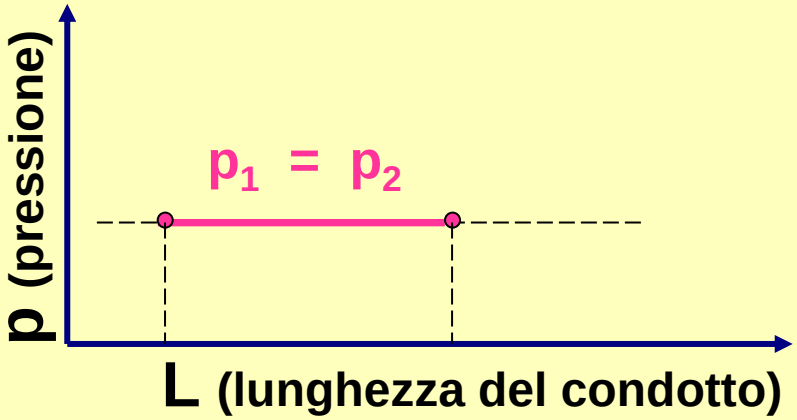


LIQUIDI REALI IN MOVIMENTO

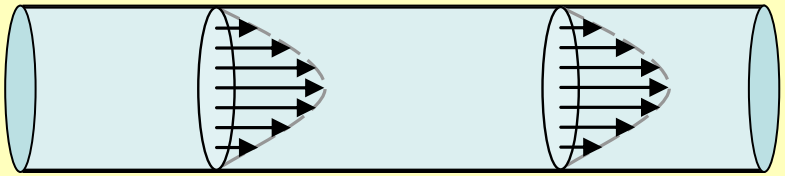
Liquido ideale con $S_1 = S_2$



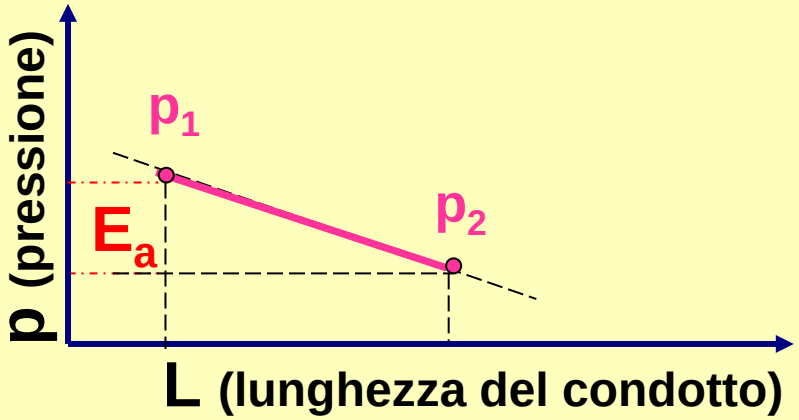
Per un liquido ideale: - la velocità è costante in tutti i punti della sezione trasversa; - la pressione è costante lungo il condotto.



Liquido reale con $S_1 = S_2$

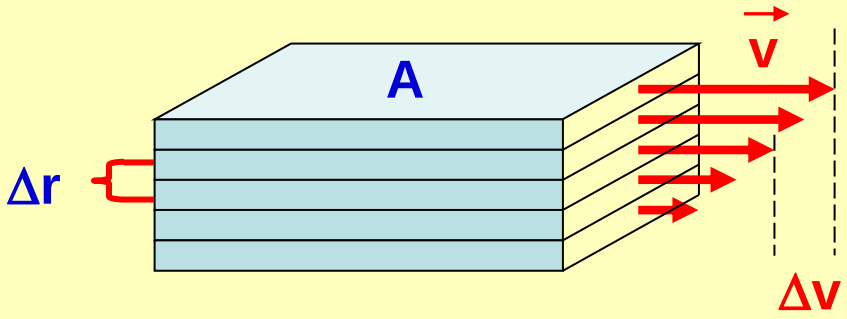


Per un liquido reale: - la velocità è maggiore al centro del condotto; - la pressione diminuisce lungo il condotto. Per far scorrere il liquido è necessario applicare una Δp per vincere le forze d'attrito.



MOTO DI UN LIQUIDO REALE – REGIME LAMINARE

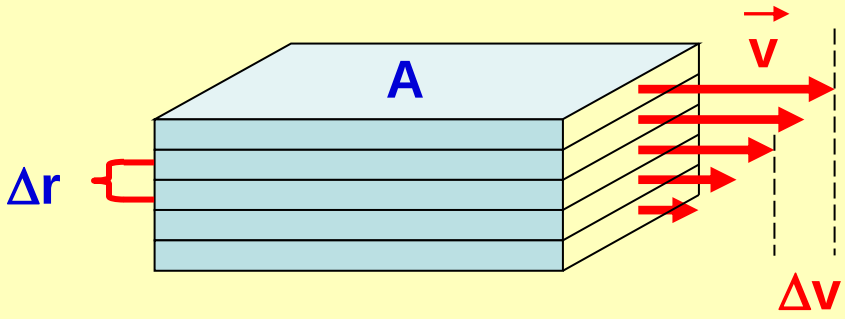
Il regime laminare è caratterizzato da un gradiente di velocità, fra uno strato di fluido e lo strato successivo.



MOTO DI UN LIQUIDO REALE – REGIME LAMINARE

Il regime laminare è caratterizzato da un gradiente di velocità, fra uno strato di fluido e lo strato successivo.

La forza di attrito F_a , che agisce fra le lamine di fluido, è proporzionale al gradiente di velocità e all'area di contatto fra gli strati, secondo un coefficiente η (viscosità del fluido).

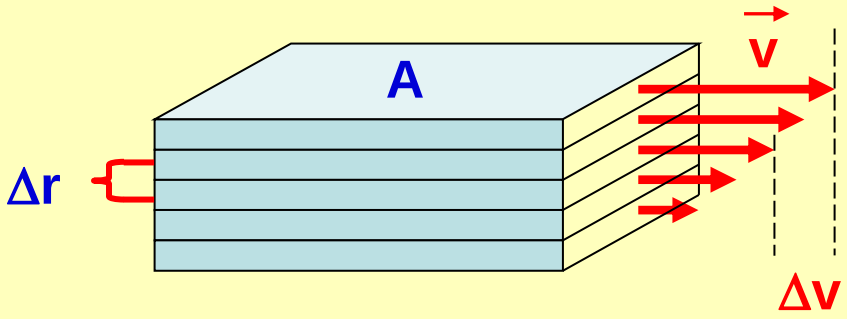


MOTO DI UN LIQUIDO REALE – REGIME LAMINARE

Il regime laminare è caratterizzato da un gradiente di velocità, fra uno strato di fluido e lo strato successivo.

La forza di attrito F_a , che agisce fra le lamine di fluido, è proporzionale al gradiente di velocità e all'area di contatto fra gli strati, secondo un coefficiente η (viscosità del fluido).

$$F_a = \eta \; A \; \frac{dv}{dr}$$



η si misura in Pa ▪ s nel S.I. , in poise nel c.g.s.

(1 poise = 0.1 Pa s)

Coefficiente di viscosità per alcuni fluidi

Materiale	viscosità (Pa s)
Aria a 20°C	$1.8\ 10^{-5}$
Acqua a 20°C	$1.0\ 10^{-3}$
Acqua a 100°C	$0.3\ 10^{-3}$
Sangue a 37°C	$2.7\ 10^{-3}$
Olio a 20°C	$84.0\ 10^{-3}$

REGIME LAMINARE - Legge di Hagen-Poiseuille

La portata per un fluido reale di viscosità η che si muove di moto laminare in un condotto a pareti rigide, cilindrico di raggio r e lunghezza L, ai cui estremi si ha una differenza di pressione Δp, è data dalla legge di Hagen - Poiseuille .

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}$$

REGIME LAMINARE - Legge di Hagen-Poiseuille

La portata per un fluido reale di viscosità η che si muove di moto laminare in un condotto a pareti rigide, cilindrico di raggio r e lunghezza L, ai cui estremi si ha una differenza di pressione Δp, è data dalla legge di Hagen - Poiseuille .

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}$$

La portata è direttamente proporzionale al gradiente di pressione Δp, inversamente proporzionale alla viscosità del liquido η e proporzionale alla quarta potenza del raggio r^4 .

RESISTENZA IDRAULICA

La resistenza idraulica per un fluido in movimento in un condotto o tratto di condotto è data dal rapporto fra la differenza di pressione, fra gli estremi del condotto o del tratto di condotto, e la portata.

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

Unità di misura nel S.I.	**Pa s /m^3**
Unità di misura pratica (c.g.s.)	**poise/ cm^3**
Dimensioni fisiche	**$[\mathcal{R}] = M\ L^{-4}\ T^{-1}$**

REGIME LAMINARE - Resistenza idraulica

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}$$

$$\mathcal{R} = \frac{8 \eta L}{\pi r^4}$$

Resistenza idraulica per un condotto cilindrico a pareti rigide di lunghezza L e raggio r in cui scorre liquido di viscosità η.

REGIME LAMINARE - Resistenza idraulica

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}$$

$$\mathcal{R} = \frac{8 \eta L}{\pi r^4}$$

Resistenza idraulica per un condotto cilindrico a pareti rigide di lunghezza L e raggio r in cui scorre liquido di viscosità η.

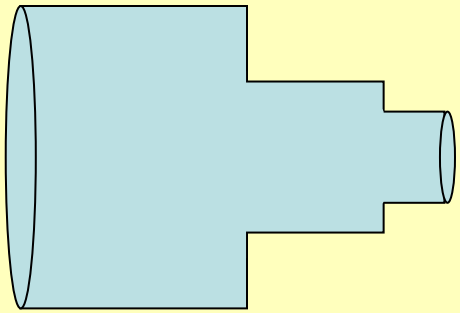
REGIME LAMINARE - Resistenza idraulica

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}$$

$$\mathcal{R} = \frac{8 \eta L}{\pi r^4}$$

Resistenza idraulica per un condotto cilindrico a pareti rigide di lunghezza L e raggio r in cui scorre liquido di viscosità η.

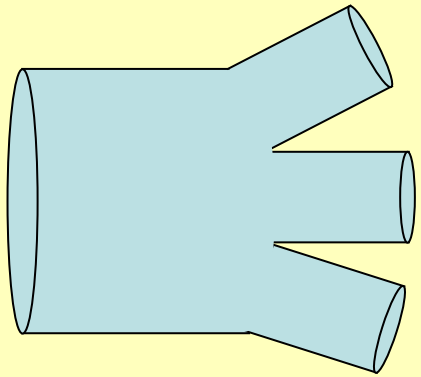


Condotti in serie

$$\mathcal{R}_{tot} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3$$

Condotti in parallelo

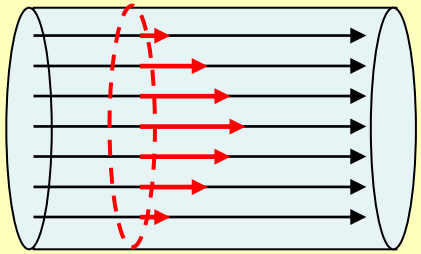
$$\frac{1}{\mathcal{R}_{tot}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3}$$



REGIME TURBOLENTO

Il regime turbolento è caratterizzato da vortici macroscopici e risucchi con scambio di liquido fra la zona diverse del fluido, ad esempio fra la zona centrale di un condotto e quella periferica. E' un modo disordinato e rumoroso.

Si manifesta in modo repentino in corrispondenza del superamento di una velocità v_c detta velocità critica.



REGIME LAMINARE

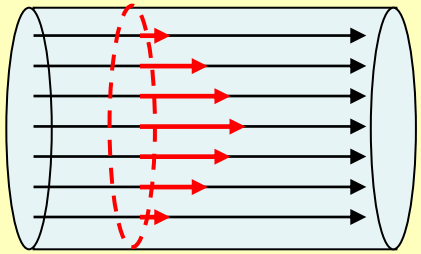
REGIME TURBOLENTO



REGIME TURBOLENTO

Il regime turbolento è caratterizzato da vortici macroscopici e risucchi con scambio di liquido fra la zona diverse del fluido, ad esempio fra la zona centrale di un condotto e quella periferica. E' un modo disordinato e rumoroso.

Si manifesta in modo repentino in corrispondenza del superamento di una velocità v_c detta velocità critica.



REGIME LAMINARE

REGIME TURBOLENTO



$$v_c = \frac{N_R\,\eta}{r\,\rho}$$

La velocità critica è funzione del raggio r del condotto, della viscosità η e densità ρ del fluido. N_R è detto numero di Reynolds. Per un condotto cilindrico rettilineo N_R varia fra 1000 e 1200 mentre $N_R < 1000$ in presenza di brusche strozzature e curvature del condotto.

REGIME TURBOLENTO Esempio

Il flusso sanguigno in un tratto di aorta rettilineo (r = 1 cm, ρ = 1 g/cm^3, η = 0.004 Pa s) è laminare o turbolento per le velocità v_1 = 0.3 m/s e v_2 = 0.6 m/s ?

$$v_c = \frac{N_R \, \eta}{r \, \rho}$$

REGIME TURBOLENTO Esempio

Il flusso sanguigno in un tratto di aorta rettilineo (r = 1 cm, ρ = 1 g/cm^3, η = 0.004 Pa s) è laminare o turbolento per le velocità v_1 = 0.3 m/s e v_2 = 0.6 m/s ?

$$v_c = \frac{N_R\,\eta}{r\,\rho}$$

$$v_c = \frac{1200 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa s}}{10^{-2}\ \text{m}\ 10^{3}\ \text{kg /m}^3} = 0.48\ \text{m/s}$$

$v_1 < v_c$ ➡ regime laminare

$v_2 > v_c$ ➡ regime turbolento

REGIME TURBOLENTO Esempio

Il flusso sanguigno in un tratto di aorta rettilineo (r = 1 cm, ρ = 1 g/cm^3, η = 0.004 Pa s) è laminare o turbolento per le velocità v_1 = 0.3 m/s e v_2 = 0.6 m/s ?

$$v_c = \frac{N_R\,\eta}{r\,\rho}$$

$$v_c = \frac{1200 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa s}}{10^{-2}\ \text{m}\ 10^3\ \text{kg/m}^3} = 0.48\ \text{m/s}$$

$v_1 < v_c$ ➡ **regime laminare**

$v_2 > v_c$ ➡ **regime turbolento**

Nota:

- quando ci si trova in presenza di una brusca curvatura il numero di Reynolds diminuisce e quindi diminuisce la velocità critica;
- quando il sangue viene emesso dal cuore all'inizio della sistole la sua velocità è superiore alla velocità critica, quindi si ha un moto turbolento che essendo rumoroso può essere oscultato.

Se la pressione aortica media del sangue in un adulto normale è 100 mm Hg e la sua portata media è 5 litri al minuto, quale lavoro meccanico medio sviluppa il cuore in un ciclo cardiaco della durata di 1 secondo ?

---

cuore mette in moto un certo volume di sangue con una certa velocità

$L = F\,ds = pS\,ds = p\,dV$

$L = p_{aorta} \cdot V_{emesso}$

$Q = V_{emesso} / \Delta t$

Se la pressione aortica media del sangue in un adulto normale è 100 mm Hg e la sua portata media è 5 litri al minuto, quale lavoro meccanico medio sviluppa il cuore in un ciclo cardiaco della durata di 1 secondo ?

---

cuore mette in moto un certo volume di sangue con una certa velocità

$L = F\,ds = pS\,ds = p\,dV$

$L = p_{aorta} \cdot V_{emesso}$

$Q = V_{emesso} / \Delta t$

Se la pressione aortica media del sangue in un adulto normale è 100 mm Hg e la sua portata media è 5 litri al minuto, quale lavoro meccanico medio sviluppa il cuore in un ciclo cardiaco della durata di 1 secondo ?

---

cuore mette in moto un certo volume di sangue con una certa velocità

$L = F\,ds = pS\,ds = p\,dV$

$L = p_{aorta} \cdot V_{emesso}$

$Q = V_{emesso} / \Delta t$

$1 \text{ litro} = 1\ dm^3 = (10\ cm)^3 = 10^3\ cm^3$

Q= 5 litri /minuto = 5000 cm^3 / 60 s = 83 cm^3 /s

Se la pressione aortica media del sangue in un adulto normale è 100 mm Hg e la sua portata media è 5 litri al minuto, quale lavoro meccanico medio sviluppa il cuore in un ciclo cardiaco della durata di 1 secondo ?

---

cuore mette in moto un certo volume di sangue con una certa velocità

$L = F\,ds = pS\,ds = P\,dV$ $\qquad$ $L = P_{aorta} \cdot V_{emesso}$

$Q = V_{emesso} / \Delta t$

Q= 5 litri /minuto = 5000 cm^3 / 60 s = 83 cm^3 /s

$V_{emesso} = 83\ cm^3 = 8.3 \cdot 10^{-5}\ m^3$

$P_{aorta} = 100\ mmHg = 1.33 \cdot 10^4\ Pa$

$L = 1.33 \cdot 10^4\ Pa \cdot 8.3 \cdot 10^{-5}\ m^3 = 1.1\ J$

Una potenza media di circa 1 J/s ovvero 1 W

L'aorta di un uomo adulto ha un raggio di 1.2 cm. Assumendo una portata di 100 cm^3/s e una viscosità di 0.04 poise, calcolare la resistenza idraulica e la diminuzione di pressione in un tratto di 15 cm.

$$R = 8 \eta L / (\pi r^4)$$

1 barie · s = 1 poise = 0.1 Pa s

1 barie = 0.1 Pa

L'aorta di un uomo adulto ha un raggio di 1.2 cm. Assumendo una portata di 100 cm^3/s e una viscosità di 0.04 poise, calcolare la resistenza idraulica e la diminuzione di pressione in un tratto di 15 cm.

$$R = 8 \eta L / (\pi r^4)$$

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

Legge di
Hagen- Poiseuille

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta L}$$

$$\mathcal{R} = \frac{8 \eta L}{\pi r^4}$$

1 barie · s = 1 poise = 0.1 Pa s

1 barie = 0.1 Pa

L'aorta di un uomo adulto ha un raggio di 1.2 cm. Assumendo una portata di 100 cm^3/s e una viscosità di 0.04 poise, calcolare la resistenza idraulica e la diminuzione di pressione in un tratto di 15 cm.

$$R = 8\,\eta\,L / (\pi\, r^4)$$

$$R = 8 \cdot 4 \cdot 10^{-2}\ \text{poise} \cdot 15\ \text{cm} / (3.14 \cdot 2.074\ \text{cm}^4)$$

$$R = 0.74\ \text{poise} \cdot \text{cm}^{-3} = 7.4 \cdot 10^4\ \text{Pa} \cdot \text{s}\ \text{m}^{-3}$$

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

Legge di Hagen- Poiseuille

$$Q = \frac{\pi\, r^4\, \Delta p}{8\,\eta\, L}$$

$$\mathcal{R} = \frac{8\,\eta\, L}{\pi\, r^4}$$

$$R = 0.74\ \text{poise} \cdot \text{cm}^{-3} = 0.074\ \text{Pa}/\ \text{cm}^{+3} = 0.074\ \text{Pa}/\ 10^{-6}\ \text{m}^3$$
$$= 7.4 \cdot 10^4\ \text{Pa} \cdot \text{s}\ \text{m}^{-3}$$

1 barie · s = 1 poise = 0.1 Pa s

1 barie = 0.1 Pa

L'aorta di un uomo adulto ha un raggio di 1.2 cm. Assumendo una portata di 100 cm^3/s e una viscosità di 0.04 poise, calcolare la resistenza idraulica e la diminuzione di pressione in un tratto di 15 cm.

$R = 8\,\eta\,L / (\pi\, r^4)$

$R = 8 \cdot 4 \cdot 10^{-2}$ poise $\cdot$ 15 cm / (3.14 $\cdot$ 2.074 cm^4)

$R = 0.74$ poise $\cdot cm^{-3} = 7.4 \cdot 10^4$ Pa $\cdot$ s m^{-3}

$R = \Delta p / Q$

$\Delta p = R\,Q$

$\Delta p = 0.74$ poise $\cdot$ cm^{-3} $\cdot$ 100 cm^3 /s = 74 barie

$\Delta p = 7.4$ Pa

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

Legge di Hagen- Poiseuille

$$Q = \frac{\pi\, r^4\, \Delta p}{8\,\eta\, L}$$

$$\mathcal{R} = \frac{8\,\eta\, L}{\pi\, r^4}$$

$R = 0.74$ poise $\cdot cm^{-3} = 0.074$ Pa/ $cm^{+3} = 0.074$ Pa/ $10^{-6}\, m^3$
$= 7.4 \cdot 10^4$ Pa $\cdot$ s m^{-3}

1 barie $\cdot$ s = 1 poise = 0.1 Pa s

1 barie = 0.1 Pa

La velocità media dell'acqua in un condotto di raggio 10 cm è 0.2 m/s. Il flusso è laminare o turbolento ? ($\eta = 10^{-3}$ Pa s)

$$v_c = N_R \, \eta / \rho \, r$$

La velocità media dell'acqua in un condotto di raggio 10 cm è 0.2 m/s. Il flusso è laminare o turbolento ? ($\eta = 10^{-3}$ Pa s)

$v_c = N_R \, \eta / \rho \, r$

$v_c = 1.2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}$ Pa s / (10^3 kg/m^3 $\cdot$ 0.1 m)

$v_c = 1.2 \cdot 10^{-2}$ m/s =

La velocità media dell'acqua in un condotto di raggio 10 cm è 0.2 m/s. Il flusso è laminare o turbolento ? ($\eta = 10^{-3}$ Pa s)

$v_c = N_R \, \eta / \rho \, r$

$v_c = 1.2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}$ Pa s / (10^3 kg/m^3 $\cdot$ 0.1 m)

$v_c = 1.2 \cdot 10^{-2}$ m/s

La velocità media è maggiore della velocità critica quindi il moto è turbolento.

REGIME TURBOLENTO



REGIME DI FLUSSO

$r_{aorta} = 1$ cm $S_{aorta} = 3.14$ cm^2 $Q = 83$ cm^3/s $v_{aorta} = 26.5$ cm/s

$$v_c = \frac{N_R \eta}{r \rho}$$

$v_c = 40$ cm/s

REGIME LAMINARE

Regime è laminare tranne che in fase di apertura della valvola aortica.

REGIME DI FLUSSO

$r_{aorta} = 1$ cm $S_{aorta} = 3.14$ cm^2 $Q = 83$ cm^3/s $v_{aorta} = 26.5$ cm/s

$$v_c = \frac{N_R \eta}{r \rho}$$

$v_c = 40$ cm/s

REGIME LAMINARE

Regime è laminare tranne che in fase di apertura della valvola aortica.

In presenza di stenosi il regime può diventare turbolento.



REGIME DI FLUSSO

$r_{aorta} = 1$ cm $S_{aorta} = 3.14$ cm^2 $Q = 83$ cm^3/s $v_{aorta} = 26.5$ cm/s

$$v_c = \frac{N_R \eta}{r \rho}$$

$v_c = 40$ cm/s

REGIME LAMINARE

Regime è laminare tranne che in fase di apertura della valvola aortica.

In presenza di stenosi il regime può diventare turbolento.

Infatti, $v \div 1 / \text{Sezione}$

e quindi $v \div 1 / r^2$

mentre $v_c \div 1 / r$

$S_1 v_1 = S_2 v_2$

v aumenta più rapidamente della velocità critica v_c



REGIME DI FLUSSO

$r_{aorta} = 1$ cm $S_{aorta} = 3.14$ cm^2 $Q = 83$ cm^3/s $v_{aorta} = 26.5$ cm/s

$$v_c = \frac{N_R \eta}{r \rho}$$

$v_c = 40$ cm/s

REGIME LAMINARE

Regime è laminare tranne che in fase di apertura della valvola aortica.

In presenza di stenosi il regime può diventare turbolento.

Infatti, $v \div 1 / \text{Sezione}$

$S_1 v_1 = S_2 v_2$

e quindi $v \div 1 / r^2$

v aumenta più rapidamente della velocità critica v_c

mentre $v_c \div 1 / r$

velocità critica



REGIME DI FLUSSO

$r_{aorta} = 1$ cm $S_{aorta} = 3.14$ cm^2 $Q = 83$ cm^3/s $v_{aorta} = 26.5$ cm/s

$$v_c = \frac{N_R \eta}{r \rho}$$

$v_c = 40$ cm/s

REGIME LAMINARE

Regime è laminare tranne che in fase di apertura della valvola aortica.

In presenza di stenosi il regime può diventare turbolento.

Infatti, $v \div 1 / \text{Sezione}$ $S_1 v_1 = S_2 v_2$

e quindi $v \div 1 / r^2$

mentre $v_c \div 1 / r$

Quindi è possibile che venga superata la velocità critica



La turbolenza richiede un aumento maggiore di pressione quindi uno sforzo maggiore.

REGIME TURBOLENTO – Resistenza idraulica

Nel regime turbolento parte dell'energia è spesa nei vortici e non è disponibile per l'avanzamento del fluido, quindi la resistenza idraulica aumenta .

La resistenza idraulica aumenta proporzionalmente alla portata nel regime vorticoso

$$\mathcal{R} = k\,Q$$

definizione di $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

REGIME TURBOLENTO – Resistenza idraulica

Nel regime turbolento parte dell'energia è spesa nei vortici e non è disponibile per l'avanzamento del fluido, quindi la resistenza idraulica aumenta .

La resistenza idraulica aumenta proporzionalmente alla portata nel regime vorticoso

$$\mathcal{R} = k\,Q$$

definizione di $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

La portata nel regime turbolento non è quindi più proporzionale alla Δp come nel caso di regime laminare, ma è indicativamente proporzionale alla sua radice.

$$Q \div \sqrt{\Delta p}$$

Regime laminare – Legge di Hagen Poiseuille

$$Q = \frac{\pi\, r^4\, \Delta p}{8\, \eta\, L}$$

REGIME TURBOLENTO – Resistenza idraulica

Nel regime turbolento parte dell'energia è spesa nei vortici e non è disponibile per l'avanzamento del fluido, quindi la resistenza idraulica aumenta .

La resistenza idraulica aumenta proporzionalmente alla portata nel regime vorticoso

$$\mathcal{R} = k\,Q$$

definizione di $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q}$$

La portata nel regime turbolento non è quindi più proporzionale alla Δp come nel caso di regime laminare, ma è indicativamente proporzionale alla sua radice.

$$Q \div \sqrt{\Delta p}$$

Regime laminare – Legge di Hagen Poiseuille

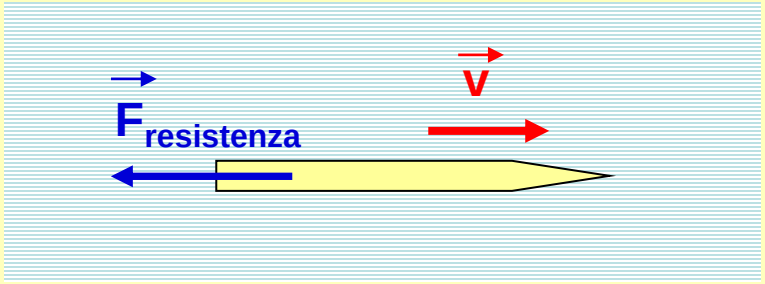
$$Q = \frac{\pi\, r^4\, \Delta p}{8\, \eta\, L}$$

Questo significa ad esempio che per raddoppiare la portata non sarà più sufficiente raddoppiare Δp, ma sarà necessario quadruplicare Δp.

TRASCINAMENTO VISCOSO

Le forze di attrito interno al fluido si esplicano anche sul movimento di corpi all'interno di un fluido reale, viscoso in quiete.

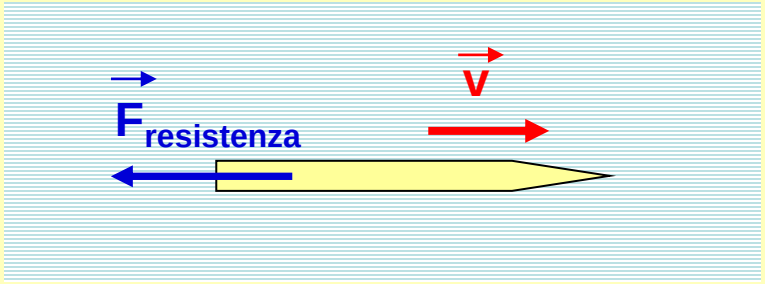
Quando un corpo si muove all'interno di un fluido viscoso si manifesta una forza di resistenza che si oppone al movimento del corpo stesso. Infatti il fluido che circonda il corpo viene trascinato e al suo avanzamento si contrappongono le forze di attrito interno.



TRASCINAMENTO VISCOSO

Le forze di attrito interno al fluido si esplicano anche sul movimento di corpi all'interno di un fluido reale, viscoso in quiete.

Quando un corpo si muove all'interno di un fluido viscoso si manifesta una forza di resistenza che si oppone al movimento del corpo stesso. Infatti il fluido che circonda il corpo viene trascinato e al suo avanzamento si contrappongono le forze di attrito interno.

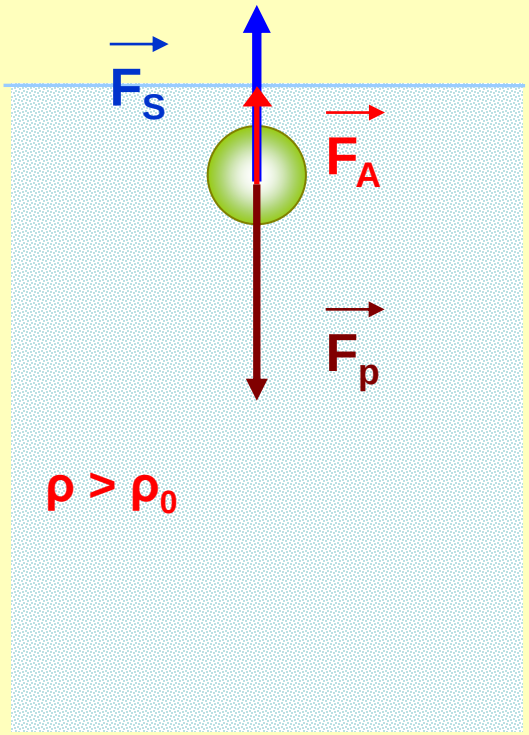


Per velocità non elevate e per un corpo di forma sferica di raggio r che si muove alla velocità v in un fluido di viscosità η, la forza di attrito viscoso è data dalla legge di Stokes

$$\vec{F}_S = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$$

TRASCINAMENTO VISCOSO – Velocità limite

Nel caso di una sfera che viene lasciata cadere in un fluido viscoso agiscono la forza peso, la forza di Archimede e quando la velocità della sfera ha assunto un valore $v \neq 0$, agisce anche la forza di Stokes.



Forza peso $F_p = mg = \rho V g = 4/3\ \pi r^3 \rho g$

Forza Archimede

$F_A = m_0 g = \rho_0 V g = 4/3\ \pi r^3 \rho_0 g$

Forza Stokes $F_S = 6\ \pi \eta r v$

TRASCINAMENTO VISCOSO – Velocità limite

Forza peso $F_p = mg = \rho V g = 4/3\ \pi r^3 \rho g$

Forza Archimede $F_A = m_0 g = \rho_0 V g = 4/3\ \pi r^3 \rho_0 g$

Forza Stokes $F_S = 6\ \pi \eta r v$

Man mano che la velocità di caduta aumenta, anche la forza di Stokes aumenta e in una condizione di equilibrio fra le forze, (quando la forza di Stokes eguaglia la risultante fra la forze peso e la forza di Archimede) la sfera si muove con velocità costante.

TRASCINAMENTO VISCOSO – Velocità limite

Forza peso $F_p = mg = \rho V g = 4/3\ \pi r^3 \rho g$

Forza Archimede $F_A = m_0 g = \rho_0 V g = 4/3\ \pi r^3 \rho_0 g$

Forza Stokes $F_S = 6\ \pi \eta r v$

Man mano che la velocità di caduta aumenta, anche la forza di Stokes aumenta e in una condizione di equilibrio fra le forze, (quando la forza di Stokes eguaglia la risultante fra la forze peso e la forza di Archimede) la sfera si muove con velocità costante.

Condizione di equilibrio $\sum \vec{F}_i = 0$

$4/3\ \pi r^3 \rho g - 4/3\ \pi r^3 \rho_0 g - 6\ \pi \eta r v = 0$

$6\ \pi \eta r v = 4/3\ \pi r^3 g (\rho - \rho_0)$

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 g (\rho - \rho_0)$$

velocità limite

TRASCINAMENTO VISCOSO – Velocità limite

L'aumento della velocità dovuto all'accelerazione gravitazionale induce un aumento della forza di Stokes fino al raggiungimento di un equilibrio fra le forze, i cui moduli:

Forza peso = Forza di Archimede + Forza di Stokes

La velocità corrispondente

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{1}{\eta}\cdot r^2\, g\,(\rho - \rho_0)$$

$\rho > \rho_0$

velocità limite



TRASCINAMENTO VISCOSO – Velocità limite

L'aumento della velocità dovuto all'accelerazione gravitazionale induce un aumento della forza di Stokes fino al raggiungimento di un equilibrio fra le forze, i cui moduli:

Forza peso = Forza di Archimede + Forza di Stokes

La velocità corrispondente

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{1}{\eta}\cdot r^2\, g\,(\rho - \rho_0)$$

$\rho > \rho_0$

velocità limite

Una applicazione di questa legge si ha nella misura della V.E.S. velocità di eritrosedimentazione, la rapidità con cui gli eritrociti sedimentano nel plasma, che è un utile strumento diagnostico.



Calcolare la velocità di eritrosedimentazione (V.E.S.) nell' approssimazione di globuli rossi di forma sferica, in caduta libera in plasma.

(globuli rossi $r = 3.5\ \mu m$, $\rho = 1.1\ g/cm^3$)

(plasma $\rho_0 = 1.02\ g/cm^3$, $\eta = 0.01$ poise).

Calcolare la velocità di eritrosedimentazione (V.E.S.) nell' approssimazione di globuli rossi di forma sferica, in caduta libera in plasma.

(globuli rossi $r = 3.5\ \mu m$, $\rho = 1.1\ g/cm^3$)

(plasma $\rho_0 = 1.02\ g/cm^3$, $\eta = 0.01$ poise).

---

in c.g.s.

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 g (\rho - \rho_0)$$

$r = 3.5\ 10^{-4}$ cm

$g = 9.8\ m/s^2 = 980\ cm/s^2$

Calcolare la velocità di eritrosedimentazione (V.E.S.) nell' approssimazione di globuli rossi di forma sferica, in caduta libera in plasma.

(globuli rossi $r = 3.5\ \mu m$, $\rho = 1.1\ g/cm^3$)

(plasma $\rho_0 = 1.02\ g/cm^3$, $\eta = 0.01$ poise).

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 g (\rho - \rho_0)$$

$r = 3.5\ 10^{-4}$ cm → $r^2 = 12.25 \cdot 10^{-8}\ cm^2$

$g = 9.8\ m/s^2 = 980\ cm/s^2$

$$v\ (cm/s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{10^{-2}\ poise}\ 12.25 \cdot 10^{-8}\ cm^2 \cdot\ (1.10 - 1.02)\ g/cm^3 \cdot 980\ cm/s^2$$

Calcolare la velocità di eritrosedimentazione (V.E.S.) nell' approssimazione di globuli rossi di forma sferica, in caduta libera in plasma.

(globuli rossi $r = 3.5\ \mu m$, $\rho = 1.1\ g/cm^3$)

(plasma $\rho_0 = 1.02\ g/cm^3$, $\eta = 0.01$ poise).

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 g (\rho - \rho_0)$$

$r = 3.5\ 10^{-4}$ cm

$g = 9.8\ m/s^2 = 980\ cm/s^2$

$$v\ (cm/s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{10^{-2}\ poise}\ 12.25 \cdot 10^{-8}\ cm^2 \cdot\ (1.10 - 1.02)\ g/cm^3 \cdot 980\ cm/s^2$$

$$v\ (cm/s) = 0.2 \cdot 10^{-3}\ cm/s$$

Calcolare la velocità di eritrosedimentazione (V.E.S.) nell' approssimazione di globuli rossi di forma sferica, in caduta libera in plasma.

(globuli rossi $r = 3.5\ \mu m$, $\rho = 1.1\ g/cm^3$)

(plasma $\rho_0 = 1.02\ g/cm^3$, $\eta = 0.01$ poise).

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 g (\rho - \rho_0)$$

$r = 3.5\ 10^{-4}$ cm

$g = 9.8\ m/s^2 = 980\ cm/s^2$

$$v\ (cm/s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{10^{-2}\ poise} 12.25 \cdot 10^{-8}\ cm^2 \cdot (1.10 - 1.02)\ g/cm^3 \cdot 980\ cm/s^2$$

$$v\ (cm/s) = 0.2 \cdot 10^{-3}\ cm/s$$

si può anche esprimere in mm/h :

$$v = 0.2 \cdot 10^{-3}\ cm/s \cdot 3.6 \cdot 10^{3}\ s/h$$

v = 7.7 mm/h

TRASCINAMENTO VISCOSO – VES

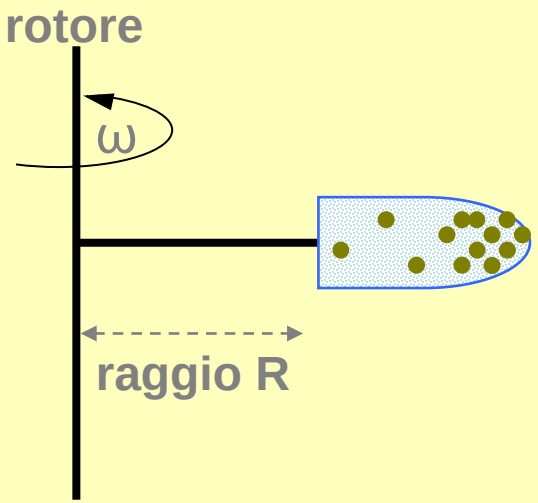
In condizioni normali, la capacità di aggregarsi dei globuli rossi è relativamente bassa, in quanto tra i globuli rossi esistono forze di repulsione. Vi è la tendenza a mantenersi separati, e quindi bassa velocità di sedimentazione.

Un incremento della presenza di macromolecole nel sangue, come ad es. elevati livelli di fibrinogeno, riduce le forze di repulsione fra globuli, aumenta la aggregazione tra globuli rossi e quindi aumenta la VES

- Il test VES -

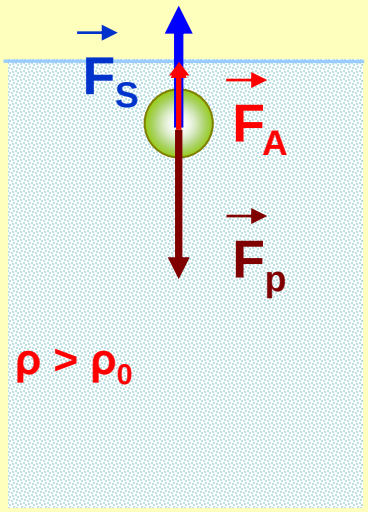
Un aumento della VES può essere indice di presenza di un processo infiammatorio

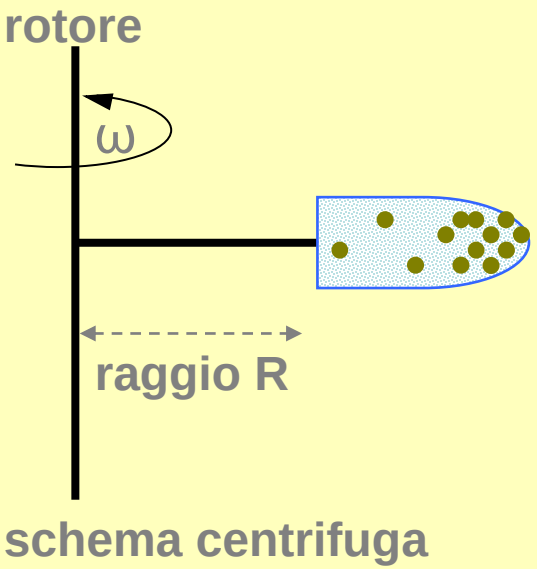
CENTRIFUGAZIONE

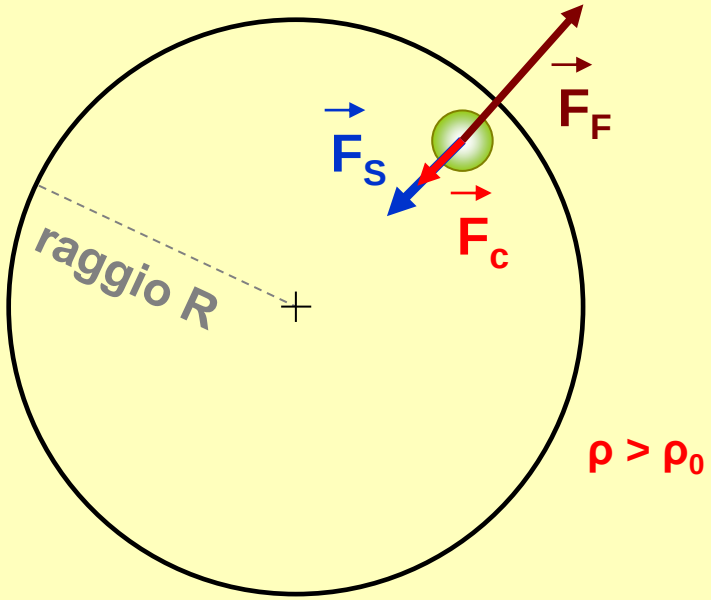


schema centrifuga

CENTRIFUGAZIONE







Quando la centrifuga è messa in funzione, il recipiente che contiene il liquido da centrifugare (es. sospensione, emulsione..) ruota con velocità angolare ω attorno all' asse centrale a distanza R, quindi con accelerazione $\omega^2 R$. Sulle particelle in sospensione e sulle molecole del liquido agisce il campo di forze centrifughe che agendo radialmente tende a far sedimentare le particelle ($\rho > \rho_0$) sul fondo del recipiente.

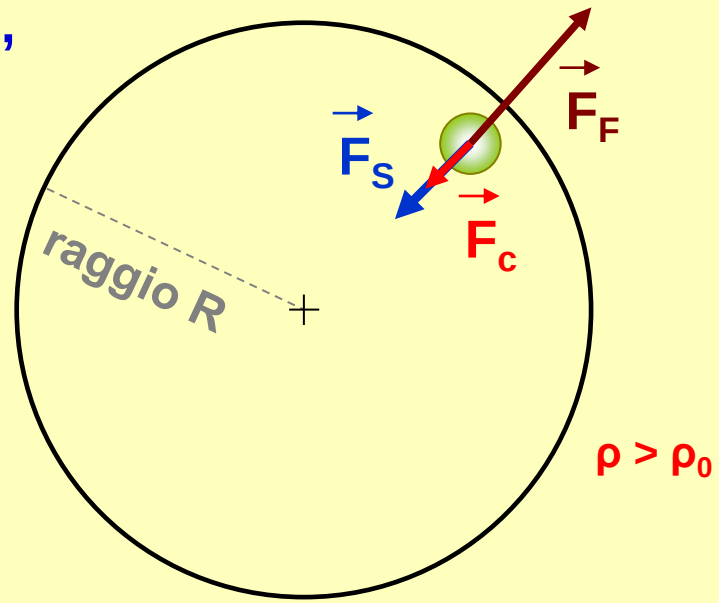
CENTRIFUGAZIONE

In analogia con quanto visto per la sedimentazione dovuta al campo gravitazionale, la particella è sottoposta alle forze:

$$F_F = m\omega^2 R$$

$$F_C = m_0\omega^2 R$$

$$F_S = 6\,\pi\,\eta\,r\,v$$



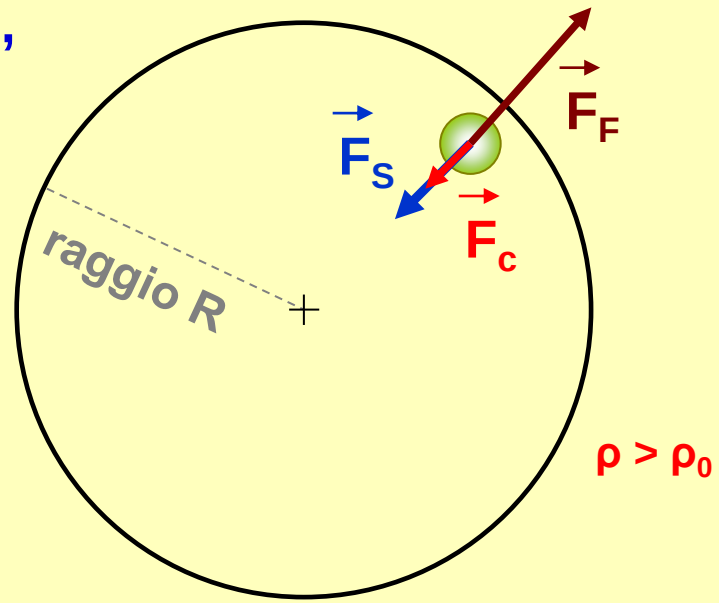
CENTRIFUGAZIONE

In analogia con quanto visto per la sedimentazione dovuta al campo gravitazionale, la particella è sottoposta alle forze:

$$F_F = m\omega^2 R$$

$$F_C = m_0\omega^2 R$$

$$F_S = 6\,\pi\,\eta\,r\,v$$



In condizione di equilibrio delle forze, la velocità di sedimentazione è costante

$$v = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\eta}\,r^2\,\omega^2 R\,(\rho - \rho_0)$$

$$v = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\eta}\,r^2\,g\,(\rho - \rho_0)$$

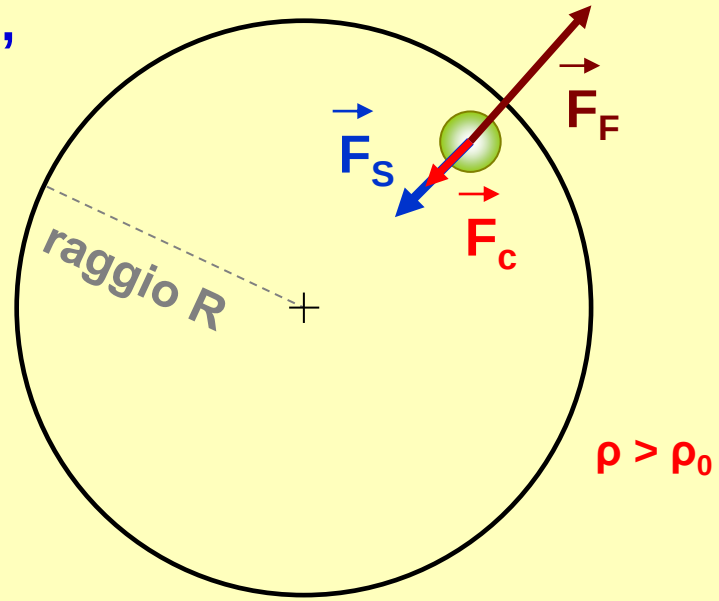
CENTRIFUGAZIONE

In analogia con quanto visto per la sedimentazione dovuta al campo gravitazionale, la particella è sottoposta alle forze:

$$F_F = m\omega^2 R$$

$$F_C = m_0\omega^2 R$$

$$F_S = 6\,\pi\,\eta\,r\,v$$



In condizione di equilibrio delle forze, la velocità di sedimentazione è costante

$$v = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\eta}\, r^2\, \omega^2 R\, (\rho - \rho_0)$$

NOTA: Rispetto alla velocità di sedimentazione dovuta al campo gravitazionale:

$$v = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\eta}\, r^2\, g\, (\rho - \rho_0)$$

nel caso della centrifuga si sostituisce all' accelerazione di gravità g, l'accelerazione $\omega^2 R$

CENTRIFUGAZIONE

In una centrifuga di raggio R = 20 cm che ruota a 3000 giri al minuto, calcolare la velocità di eritrosedimentazione nell' approssimazione di globuli rossi di forma sferica (r = 3.5 μm, ρ = 1.1 g /cm^3) in plasma (ρ_0 = 1.02 g/cm^3, η =0.01 poise).

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 \omega^2 R (\rho - \rho_0)$$

r = 3.5 10^{-4} cm g = 9.8 m/s^2 = 980 cm /s^2

ω = 2 π f f = 3000 /60 = 50 Hz

ω = 2 π 50 = 314 s^{-1} ω^2 = 9.9 10^4 s^{-2}

ω^{2}R = 9.9 · 10^4 · 20 = 1.97 · 10^6 cm/s^2

CENTRIFUGAZIONE

In una centrifuga di raggio R = 20 cm che ruota a 3000 giri al minuto, calcolare la velocità di eritrosedimentazione nell' approssimazione di globuli rossi di forma sferica (r = 3.5 μm, ρ = 1.1 g /cm^3) in plasma (ρ_0 = 1.02 g/cm^3, η = 0.01 poise).

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 \omega^2 R (\rho - \rho_0)$$

r = 3.5 10^{-4} cm g = 9.8 m/s^2 = 980 cm /s^2

$\omega = 2 \pi f$ f = 3000 /60 = 50 Hz

$\omega = 2 \pi 50 = 314$ s^{-1} $\omega^2 = 9.9\ 10^4$ s^{-2}

$\omega^2 R = 9.9 \cdot 10^4 \cdot 20 = 1.97 \cdot 10^6$ cm/s^2

$$v\ (cm/s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{10^{-2}\ poise}\ 12.25 \cdot 10^{-8}\ cm^2 \cdot (1.10 - 1.02) g/cm^3 \cdot 1.97 \cdot 10^6\ cm/s^2$$

v (cm/s) = 0.42 cm/s

CENTRIFUGAZIONE

In una centrifuga di raggio R = 20 cm che ruota a 3000 giri al minuto, calcolare la velocità di eritrosedimentazione nell' approssimazine di globuli rossi di forma sferica (r = 3.5 μm, ρ = 1.1 g /cm^3) in plasma (ρ_0 = 1.02 g/cm^3, η =0.01 poise).

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\eta} r^2 \omega^2 R (\rho - \rho_0)$$

r = 3.5 10^{-4} cm g = 9.8 m/s^2 = 980 cm /s^2

ω = 2 π f f = 3000 /60 = 50 Hz

ω = 2 π 50 = 314 s^{-1} ω^2 = 9.9 10^4 s^{-2}

ω^{2}R = 9.9 · 10^4 · 20 = 1.97 · 10^6 cm/s^2

$$v\ (cm/s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{10^{-2}\ poise}\ 12.25 \cdot 10^{-8}\ cm^2 \cdot (1.10 - 1.02) g/cm^3 \cdot 1.97 \cdot 10^6\ cm/s^2$$

v (cm/s) = 0.42 cm/s

NOTA: l'accelerazione ω^2 R in questo esempio è maggiore di g di un fattore circa 2000 e quindi la velocità di sedimentazione sarà maggiore dello stesso fattore.